АКАДЕМИЯ НАУК СССР

SURPLUS
DUPLICATE

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ V.
ВЫПУСК 3

Received
SEP 21 1960
Air Information Division

1960

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1960

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.*** (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.***, ***Линник Ю. В.***, ***Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В.***

СОДЕРЖАНИЕ

Яглом А. М. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром . . . 265
Yaglom A. M. Effective Solutions of Linear Approximation Problems for Multivariate Stationary Processes with a Rational Spectrum 292
Ширяев А. Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. I. . 293
Shryaev A. N. Some Problems in the Spectral Theory of Higher-Order Moments. I. 313
Гирсанов И. В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры 314
Girsanov I. V. On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures 330

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Whittle P. Bounds for the Moments of Linear and Quadratic Formes in Independent Variables 331
Уиттл П. Оценки моментов линейных и квадратичных форм независимых случайных величин 335
Синай Я. Г. Динамические системы и стационарные марковские процессы . . 335
Sinay Ya. G. Dynamical Systems and Stationary Markov Processes . . . 338
Волков И. С. О вероятностях крайних значений сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний . . . 338
Volkov I. S. On Probabilities for Extreme Values of Sums of Random Variables Defined on a Homogeneous Markov Chain with a Finite Number of States . 352
Иванов В. А. О среднем числе пересечений некоторого уровня выборочными функциями вероятностного процесса 352
Ivanov V. A. On the Average Number of Intersections of a Level by the Sample Functions of a Stochastic Process 357
Волконский В. А. Эргодическая теорема для распределения длины выброса . . 357
Volkonski V. A. An Ergodic Theorem on the Distribution of the Duration of Fades 360
Соболь И. М. О решении интегрального уравнения Пайерлса методом Монте-Карло 361
Sobol I. M. On the Solution of Peierls' Integral Equation by the Monte Carlo Method 366
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара кафедры теории вероятностей Московского университета (октябрь — декабрь 1959 г.) . . . 367
Summary of Papers Presented at the Sessions of the Probability Research Seminar, Moscow University (October — December, 1959) 367

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В-9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ом V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1960

ЭФФЕКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАЦИОНАЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

А. М. ЯГЛОМ

Задача линейной экстраполяции многомерных случайных стацио-арных процессов, впервые рассмотренная еще в 1941 г. в заметке За-хина [1], в последние годы снова привлекла внимание целого ряда следователей (см., например, работы [2—8] *). При всем том до сих ор мы почти не имеем результатов, позволяющих эффективно строить инейный функционал от значений всех компонент рассматриваемого ногомерного процесса в прошлом, дающий наилучшее приближение значению какой-то одной его компоненты в будущий момент вре-ени, т. е. позволяющих указать решение задачи экстраполяции в орме, допускающей практическое использование в различного рода рикладных вопросах. Некоторым исключением в этом отношении яв-ляется лишь известная монография Н. Винера [10], в гл. IV которой писывается метод практического решения задач об экстраполяции и ильтрации (по данным на полупрямой) для того же специального асса многомерных стационарных процессов, который будет рассмот-ен в настоящей статье. Однако изложение Винера не вполне ясно, предложенный им метод весьма громоздок, так что применение его всех случаях, кроме самых простейших, является довольно затруд-ительным. В настоящей статье мы также будем рассматривать задачу страполяции и другие родственные ей аппроксимационные задачи экстраполяция по данным на конечном интервале, фильтрация, интер-оляция) для многомерных стационарных процессов (с непрерывным ременем) с чисто практической стороны; в этой связи мы не будем ремиться к максимальной общности, а ограничимся одним частным но достаточно широким с точки зрения приложений) классом много-

* В работах [3] и [5] (последняя из которых частично построена на материале кций, читанных в 1955—56 гг. в Московском университете М. Г. Крейном), в частно-й, впервые дано полное доказательство результатов, заявленных в [1]. Отметим еще, о в работах [1—7] рассматриваются лишь процессы с дискретным временем; однако к показано в [8], при экстраполяции многомерных стационарных процессов переход дискретного времени к непрерывному может быть осуществлен так же, как и в одно-рном случае (ср. [9], гл. XII, § 5). В случае же других линейных аппроксимацион-х задач, рассматриваемых в §§ 2—4 настоящей статьи (за исключением задачи о ильтрации по данным на полупрямой), такой переход оказывается невозможным.

мерных процессов, который мы будем называть *невырожденными процессами с рациональным спектром* (точное определние см. в начале § 1). Как будет видно из дальнейшего для процессов этого класса эффективное решение сравнительно широкого класса линейных аппроксимационных задач может быть сведено к нахождению корней некоторого алгебраического уравнения и к последующему решению несложной системы линейных алгебраических уравнений; общий метод, позволяющий осуществить это сведение, является естественным обобщением метода, примененного в работах автора [11] и [12] к решению аналогичных задач для одномерных случайных процессов. В заключительном § 4 статьи будут коротко указаны также некоторые дальнейшие применения этого метода *.

1. Простейшая задача экстраполяции

Пусть $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$, $-\infty < t < \infty$ — многомерный стационарный случайный процесс. Не уменьшая общности можно считать, что среднее значение процесса $\xi(t)$ тождественно равно нулю:

$$\mathbf{M}\,\xi_k(t) \equiv 0. \tag{1.}$$

При этом основной статистической характеристикой процесса $\xi(t)$ будет корреляционная матрица

$$\| B_{jk}(\tau) \| = \| \mathbf{M}\,\xi_j(t+\tau)\,\overline{\xi_k(t)} \| . \tag{1.}$$

Ограничимся случаем, когда все функции $B_{jk}(\tau)$ достаточно быстро убывают на бесконечности, так что их можно разложить в интеграл Фурье:

$$B_{jk}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} f_{jk}(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.}$$

Тогда, согласно известной теореме Г. Крамера,

$$\| f_{jk}(\lambda) \| \tag{1.}$$

будет эрмитовой неотрицательно определенной матрицей, называемой матрицей спектральных плотностей (короче — спектральной матрицей) процесса $\xi(t)$. Сверх того, мы будем еще предполагать, что все функции $f_{jk}(\lambda)$ суть рациональные функции переменного λ:

$$f_{jk}(\lambda) = \frac{Q_{jk}(\lambda)}{P_{jk}(\lambda)}, \tag{1.}$$

где $Q_{jk}(\lambda)$ и $P_{jk}(\lambda)$ — некоторые многочлены. Многомерные стационарные процессы, удовлетворяющие условиям (1.3) и (1.5), мы будем кратко называть процессами с рациональным спектром.

---

* Уже после завершения работы над настоящей статьей автор ознакомился с работой С. Дарлингтона [13], в которой с несколько иных позиций излагается тот же метод решения задач экстраполяции и фильтрации стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью, который был предложен в работах [11] и [12] (оставшихся, по-видимому, неизвестными С. Дарлингтону). В разделах 3.4 и 4.4 работы [13] рассматривается также применение метода к решению некоторых специальных случаев задачи о фильтрации (по данным на полупрямой) многомерных стационарных процессов с рациональным спектром.

Для процессов с рациональным спектром и детерминант спектральной матрицы также рационален:

$$D(\lambda) = \det \| f_{jk}(\lambda) \| = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}. \tag{1.6}$$

В силу неотрицательности $\| f_{jk}(\lambda) \|$ здесь $D(\lambda) \geqslant 0$ при всех вещественных λ. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что функция $D(\lambda)$ не равна тождественно нулю. Согласно основному результату Засухина [1] (см. также [8]) в этом случае процесс $\xi(t)$ обязательно будет регулярным наивысшего ранга, т. е. будет обладать простыми экстраполяционными свойствами. Мы, впрочем, нигде не будем пользоваться этим фактом: приведенное далее элементарное решение задачи экстраполяции не требует никаких сведений из общей теории.

Условие, чтобы $D(\lambda)$ не было тождественным нулем, является основным условием невырожденности процесса с рациональным спектром. Нам, однако, будет удобно понимать невырожденность несколько более узко. Если детерминант $D(\lambda)$ не равен нулю при всех λ, то он все же может обращаться в нуль в отдельных точках вещественной оси — в тех точках, которые совпадают с вещественными корнями многочлена $Q(\lambda)$. В основной части настоящей статьи мы будем рассматривать лишь процессы, для которых $D(\lambda)$ нигде не обращается в нуль на вещественной оси, т. е. многочлен $Q(\lambda)$ вовсе не имеет вещественных нулей (а также и нуля в точке $\lambda = \infty$, ср. сноску на стр. 270). Именно такие процессы $\xi(t)$ с рациональным спектром мы и будем называть невырожденными. На самом деле приведенное ниже решение задачи экстраполяции для невырожденных в указанном здесь смысле стационарных процессов с рациональным спектром почти без изменения переносится и на те процессы, для которых $D(\lambda)$ имеет конечное число вещественных нулей. Однако наглядный смысл получаемых экстраполяционных формул в последнем случае заметно более сложен, чем в случае процессов, названных нами невырожденными (см. замечание на стр. 273). Отметим еще, что в практических задачах вырождение, заключающееся в обращении неотрицательного многочлена $Q(\lambda)$ в нуль в отдельных точках вещественной оси, будет встречаться лишь в некоторых исключительных случаях, причем в этих случаях обычно будет трудно точно установить наличие такого вырождения.

В дальнейшем помимо спектрального разложения (1.3) корреляционных функций процесса $\xi(t)$ нам понадобится также и спектральное разложение самого этого процесса:

$$\xi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_k(\lambda), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Здесь $Z_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$ — случайные процессы с некоррелированными приращениями такие, что при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\lambda_3 < \lambda_4$

$$\mathbf{M}\,[Z_j(\lambda_2) - Z_j(\lambda_1)]\,\overline{[Z_k(\lambda_4) - Z_k(\lambda_3)]} = \int\limits_{[\lambda_1, \lambda_2] \cap [\lambda_3, \lambda_4)} f_{jk}(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.8}$$

Простейшая задача экстраполяции процесса $\xi(t)$ состоит в нахождении линейного функционала $\widetilde{\xi}_1(t, \tau)$ (где t произвольно, а $\tau > 0$) от значений

$\xi_k(t')$, $k = 1, \ldots, n$, $t' \leqslant t$, дающего наилучшее приближение к случайной величине $\xi_1(t+\tau)$. При этом слова «наилучшее приближение» понимаются в смысле классического метода наименьших квадратов, т. е. в смысле обращения в минимум среднего квадрата ошибки экстраполяции

$$\sigma_1^2(\tau) = \mathbf{M}\,|\,\xi_1(t+\tau) - \widetilde{\xi}_1(t,\tau)\,|^2. \qquad (1.9$$

Если совокупность всех случайных величин ограниченной дисперсии рассматривать как гильбертово пространство H (со скалярным произведением $(\xi, \eta) = \mathbf{M}\,\xi\eta$), то геометрически $\widetilde{\xi}_1(t,\tau)$ будет совпадать с проекцией вектора $\xi_1(t+\tau)$ на линейное подпространство

$$H_\xi(t) = [\xi_k(t'),\ k = 1, \ldots, n,\ t' \leqslant t], \qquad (1.10$$

натянутое на векторы $\xi_k(t')$, $k = 1, \ldots, n$, $t' \leqslant t$. Отсюда ясно, что $\widetilde{\xi}_1(t,\tau)$ определяется однозначно (как элемент H, т. е. с точностью до случайных величин, почти наверное равных нулю) и является единственным элементом в H, удовлетворяющим условиям:

а) $$\widetilde{\xi}_1(t,\tau) \in H_\xi(t) \qquad (1.11$$

и

б) $$(\xi_1(t+\tau) - \widetilde{\xi}_1(t,\tau),\ \xi_k(t')) \equiv \mathbf{M}\,[\xi_1(t+\tau) - \widetilde{\xi}_1(t,\tau)]\,\overline{\xi_k(t')} = 0 \qquad (1.12$$

при всех $k = 1, \ldots, n$ и $t' \leqslant t$. Таким образом для решения задачи экстраполяции надо лишь каким угодно образом подобрать случайную величину $\widetilde{\xi}_1(t,\tau)$, удовлетворяющую этим условиям.

Ограничиваясь пока случаем невырожденного процесса $\xi(t)$ с рациональным спектром, будем подбирать случайную величину $\widetilde{\xi}_1(t,\tau)$ из числа величин вида

$$\widetilde{\xi}_1(t,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\Phi_k(\lambda)\,dZ_k(\lambda), \qquad (1.13$$

где все интегралы понимаются в среднем квадратичном*. Для решения задачи достаточно найти хотя одну систему функций $\Phi_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, для которой величина (1.13) удовлетворяет условиям а) и б). После этого нам еще надо будет переписать соответствующую величину $\widetilde{\xi}_1(t,\tau)$ непосредственно в виде линейного функционала от значений в прошлом (при $t' \leqslant t$) компонент процесса $\xi(t)$; однако как мы увидим, для рассматриваемого здесь класса процессов $\xi(t)$ это сделать очень легко (см. стр. 273).

Для того чтобы все интегралы в (1.13) существовали как интегралы в среднем квадратичном, функции $\Phi_k(\lambda)$ должны удовлетворять условиям

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(\lambda)|^2 f_{kk}(\lambda)\,d\lambda < \infty, \qquad k = 1, \ldots, n. \qquad (1.14$$

Что же касается условий а) и б), то для того, чтобы их удовлетворить, достаточно наложить некоторые естественные ограничения на поведение

* Отметим, что в случае вырожденных процессов с рациональным спектром, подбор величины $\widetilde{\xi}_1(t+\tau)$ в таком виде вполне может оказаться невозможным (см. замечание на стр. 273).

функций $\Phi_k(\lambda)$ при комплексных значениях аргумента λ. Действительно, условие б) (см. (1.12)), очевидно, равносильно следующему равенству (в котором положено $t' = t - s$, т. е. $s = t - t' \geqslant 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} \left\{ [e^{i\tau\lambda} - \Phi_1(\lambda)] f_{1k}(\lambda) - \sum_{j=2}^{k} \Phi_j(\lambda) f_{jk}(\lambda) \right\} d\lambda = 0, \qquad (1.15)$$

$$k = 1, \ldots, n, \; s \geqslant 0.$$

Но в силу теоремы Коши об интегрировании в комплексной области это равенство наверное будет иметь место, если будет выполняться следующее условие:

2) *Функции*

$$\Psi_k(\lambda) = [e^{i\tau\lambda} - \Phi_1(\lambda)] f_{1k}(\lambda) - \sum_{j=2}^{n} \Phi_j(\lambda) f_{jk}(\lambda), \; k = 1, \ldots, n \qquad (1.16)$$

все могут быть аналитически продолжены в верхнюю полуплоскость $\Lambda_1 = \{\lambda, \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$ *так, чтобы они во всей этой полуплоскости не имели особенностей и убывали при* $|\lambda| \to \infty$ *не медленнее, чем* $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (ср. [11]). Условие а) наверное будет выполнено, если все интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Phi_k(\lambda) dZ_k(\lambda)$ будут зависеть лишь от значений $\xi_k(t')$ при $t' \leqslant t$; последнего же можно добиться, потребовав чтобы выполнялось условие:

3) *Функции* $\Phi_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, *все могут быть аналитически продолжены в нижнюю полуплоскость* $\Lambda_2 = \{\lambda; \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0\}$ *так, чтобы во всей этой полуплоскости они не имели особенностей и возрастали при* $|\lambda| \to \infty$ *не быстрее некоторой конечной степени* $|\lambda|$ (ср. [11]). Таким образом, для решения задачи экстраполяции процесса $\xi(t)$ достаточно подобрать функции $\Phi_k(\lambda)$, удовлетворяющие условиям 1), 2) и 3).

Покажем теперь, что всем этим условиям нетрудно удовлетворить, ограничившись даже лишь рациональными функциями $\Phi_k(\lambda)$. В самом деле, положим

$$\Phi_k(\lambda) = \frac{\omega_k(\lambda)}{(\lambda - \theta_1)(\lambda - \theta_2) \ldots (\lambda - \theta_L)}, \; k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.17)$$

где $\omega_k(\lambda)$ — многочлены относительно λ, а θ_i, $i = 1, \ldots, L$ — комплексные числа. В таком случае, для того чтобы удовлетворить условию 3), надо лишь ограничиться числами θ_i с $\operatorname{Im}\theta_i > 0$. Для того чтобы при этом выполнялось также и условие 2), прежде всего все θ_i не должны быть полюсами ни одной из функций $\Psi_k(\lambda)$. Таким образом, должны иметь место равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j(\theta_i) f_{jk}(\theta_i) = 0, \; k = 1, \ldots, n, \; i = 1, \ldots, L \qquad (1.18)$$

(другие ограничения, вытекающие из условия 2), будут указаны ниже). Отсюда видно, что все полюсы θ_i функций $\Phi_k(\lambda)$ должны совпадать с нулями детерминанта $\| f_{jk}(\lambda) \|$ — функции (1.6).

Попытаемся теперь подсчитать число нулей функции (1.6), т. е. степени многочлена $Q(\lambda)$. Пусть в (1.5) знаменатель $P_{jk}(\lambda)$ имеет вид

$$P_{jk}(\lambda) = \prod_{m=1}^{N_{jk}} (\lambda - \alpha_{jk}^{(m)}) \prod_{m=1}^{N_{kj}} (\lambda - \overline{\alpha_{kj}^{(m)}}), \tag{1.19}$$

где отдельные $\alpha_{jk}^{(m)}$ могут совпадать между собой и

$$\operatorname{Im} \alpha_{jk}^{(m)} > 0,\ m = 1, \ldots, N_{jk};\ \operatorname{Im} \overline{\alpha_{kj}^{(m)}} < 0,\ m = 1, \ldots, N_{kj}. \tag{1.20}$$

В таком случае

$$P(\lambda) = \left| \prod_{j,k=1}^{n} \prod_{m=1}^{N'_{jk}} (\lambda - \alpha_{jk}^{(m)}) \right|^2, \tag{1.21}$$

где $\alpha_{jk}^{(m)}$, $m = 1, \ldots, N'_{jk}$ — те нули в верхней полуплоскости многочлена $P_{jk}(\lambda)$, которые не являются одновременно или нулями какого-то $P_{lk}(\lambda)$ с $l < j$, или же нулями какого-то $P_{jl}(\lambda)$ с $i < k$, но не $P_{li}(\lambda)$, $l \neq j$ и не $P_{lk}(\lambda)$, $l > j$ *. Поэтому степень $2K$ многочлена $P(\lambda)$ дается равенством

$$2K = 2 \sum_{j,k=1}^{n} N'_{jk}. \tag{1.22}$$

Пусть степень многочлена $Q_{jj}(\lambda)$ равна $2(N_{jj} - m_j)$ (напомним, что N_{jj} — это степень $P_{jj}(\lambda)$). В таком случае степень знаменателя члена $f_{11}(\lambda) f_{22}(\lambda) \ldots f_{nn}(\lambda)$ детерминанта $D(\lambda)$ будет превосходить степень числителя на $2(m_1 + m_2 + \ldots m_n)$. Для всех же других членов детерминанта $D(\lambda)$ разность степеней знаменателя и числителя будет во всяком случае не меньше (ибо $|f_{jk}(\lambda)| \leqslant \sqrt{f_{jj}(\lambda) f_{kk}(\lambda)}$ при всех j и k). Поэтому и после приведения к общему знаменателю всех членов $D(\lambda)$ степень знаменателя будет превосходить степень числителя на $2(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$ **. Следовательно, степень $2L$ многочлена $Q(\lambda)$ равна:

$$2L = 2K - 2 \sum_{j=1}^{n} m_j = 2 \left(\sum_{j,k=1}^{n} N'_{jk} - \sum_{j=1}^{n} m_j \right). \tag{1.23}$$

---

* Многочлен $P(\lambda)$, очевидно, является наименьшим общим кратным многочленов $P_{j_1 k_1}(\lambda) P_{j_2 k_2}(\lambda) \ldots P_{j_n k_n}(\lambda)$, где $j_1 j_2 \ldots j_n$ и $k_1 k_2 \ldots k_n$ — перестановки чисел $1, 2, \ldots n$. Чтобы не загромождать изложения, мы здесь намеренно допустили неточность, несколько упростив общее правило составления этого наименьшего кратного. На самом же деле, если, например, некоторый корень многочлена $P_{jk}(\lambda)$ одновременно является также корнем $P_{ji}(\lambda)$ и $P_{jh}(\lambda)$ (где $i < k$, $h < k$) и $P_{li}(\lambda)$ и $P_{lh}(\lambda)$ (с $l \neq j$), но не $P_{mi}(\lambda)$ или $P_{mh}(\lambda)$ с $m \neq l$, $m \neq j$, то его также не надо включать в число корней $\alpha_{jk}^{(m)}$, $m = 1, \ldots, N'_{jk}$. Нетрудно проверить, однако, что в этом случае и число (1.26) тех уравнений, о которых будет идти речь на стр. 272 также придется уменьшить на единицу. Строгое доказательство того, что общее число всех этих уравнений всегда ровно в 2 раза меньше степени многочлена $P(\lambda)$ может быть проведено с помощью метода математической индукции.

** Вообще говоря, при приведении всех членов $D(\lambda)$ к общему знаменателю старшие члены числителя могут взаимно сократиться и тогда разность степеней знаменателя и числителя окажется большей, чем $2(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$. Однако в этом случае мы будем говорить, что многочлен $Q(\lambda)$ имеет корень $\lambda = \infty$ и будем причислять соответствующий процесс $\xi(t)$ к числу вырожденных.

В невырожденном случае все нули $Q(\lambda)$ будут комплексными: они естественно разбиваются на комплексно сопряженные пары и могут быть обозначены через

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_L, \overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \ldots, \overline{\theta}_L$$

(корни θ_i лежат в верхней полуплоскости, корни $\overline{\theta}_i$ — в нижней). Будем теперь искать $\Phi_k(\lambda)$ в виде (1.17), где $\theta_1, \ldots, \theta_L$ — все L корней в верхней полуплоскости многочлена $Q(\lambda)$. При этом условие 1) (т. е. (1.14)) будет удовлетворено, если в качестве $\omega_k(\lambda)$ будет выбран многочлен $(L + m_k - 1)$-ой (но не более высокой!) степени. Такой многочлен, очевидно, имеет всего $L + m_k$ коэффициентов. Поэтому потребовав, чтобы все $\Phi_k(\lambda)$ удовлетворяли (1.14), мы будем иметь в распоряжении еще $nL + m_1 + \ldots + m_n$ произвольных коэффициентов, которые надо выбрать так, чтобы выполнялось и условие 2).

Итак, нам осталось найти значения многочленов $\omega_k(\lambda)$, при которых все функции $\Psi_k(\lambda)$ не будут иметь полюсов в верхней полуплоскости. Иначе говоря, коэффициенты многочленов $\omega_k(\lambda)$ должны быть подобраны так, чтобы после подстановки (1.17) в (1.16) и приведения всех рациональных функций в правой части к общему знаменателю все нули $\alpha_{jk}^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots, N_{jk}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и все нули θ_i, $i = 1, 2, \ldots, L$ в знаменателе сократились бы с нулями не меньшей кратности числителя. Начнем с нулей $\alpha_{jk}^{(m)}$. Для того чтобы сократились все нули $\alpha_{j1}^{(m)}$, $m = 1, \ldots, N_{j1}$, $j = 1, \ldots, n$ в знаменателе функции $\Psi_1(\lambda)$ (т. е. чтобы функция $\Psi_1(\lambda)$ не имела полюсов при $\lambda = \alpha_{j1}^{(m)}$), надо потребовать, чтобы после приведения к общему знаменателю всех рациональных функций $f_{j1}(\lambda)$, $j = 1, \ldots, n$ в правой части (1.16) с $k = 1$ числитель обращался в нуль во всех нулях в верхней полуплоскости знаменателя. Так как этот числитель является линейной комбинацией многочленов $\omega_j(\lambda)$, то каждое условие обращения его в нуль дает одно линейное уравнение относительно коэффициентов указанных многочленов. Общее число получаемых таким образом уравнений, очевидно, равно степени наименьшего общего знаменателя функций $f_{11}(\lambda), \ldots, f_{n1}(\lambda)$, т. е. равно

$$N'_{11} + N'_{21} + \ldots + N'_{n1}, \tag{1.24}$$

где N'_{j1} — число нулей в верхней полуплоскости многочлена $P_{j1}(\lambda)$, не совпадающих с каким-либо нулем $P_{l1}(\lambda)$, $l < j$. Подобное же рассуждение применимо и к функции $\Psi_2(\lambda)$ с тем только различием, что если нуль $\alpha_{j2}^{(m)}$ совпадает с каким-то $\alpha_{j1}^{(r)}$, но не совпадает ни с одним $\alpha_{l1}^{(s)}$, $l \neq j$, и ни с одним $\alpha_{l2}^{(t)}$, $l > j$, то соответствующее этому нулю линейное уравнение (имеющее вид: $\omega_j(\alpha_{j2}^{(m)}) = 0$) будет уже учтено среди уравнений, относящихся к функции $\Psi_1(\lambda)$. Поэтому общее число новых уравнений здесь равно

$$N'_{j2} + N'_{22} + \ldots + N'_{n2}, \tag{1.25}$$

где N'_{j2} имеет тот же смысл, что и в (1.21) и (1.22). Аналогично показывается, что условие отсутствия полюсов в точках $\alpha_{jk}^{(m)}$ у функции $\Psi_k(\lambda)$

при условии, что все $\Psi_l(\lambda)$, $l<k$ не имеют полюсов в $\alpha_{lk}^{(m)}$, дает нам:

$$N'_{1k}+N'_{2k}+\ \ldots\ +N'_{nk} \tag{1.26}$$

новых линейных уравнений относительно коэффициентов многочленов $\omega_j(\lambda)$, где все N'_{jk} имеют тот же смысл, что и в (1.21) и (1.22). Следовательно, условие отсутствия полюсов у всех функций $\Psi_k(\lambda)$, $k=1,\ \ldots,\ n$, во всех точках $\alpha_{jk}^{(m)}$, $j=1,\ \ldots,\ n$, $m=1,\ \ldots,\ N_{jk}$ равносильно системе $\sum\limits_{j,k} N'_{jk}=K$ линейных уравнений относительно коэффициентов многочленов $\omega_j(\lambda)$.

Посмотрим теперь, что дают условия отсутствия полюсов у $\Psi_k(\lambda)$ в точках θ_i. Эти условия, очевидно, равносильны системе уравнений (1.18). Будем сперва рассматривать общий случай, когда все корни θ_i, $i=1,\ \ldots,\ L$ различны. В таком случае ранг спектральной матрицы $\|f_{jk}(\lambda)\|$ при $\lambda=\theta_i$ будет равен $n-1$, т. е. из n уравнений (1.18) с фиксированным индексом i ровно $n-1$ будут линейно независимыми. Учитывая, что i пробегает L значений, можно заключить, что условие отсутствия полюсов у $\Psi_k(\lambda)$ в точках θ_i равносильно системе $(n-1)L$ линейных уравнений относительно коэффициентов многочленов $\omega_j(\lambda)$. Следовательно, для того чтобы удовлетворить условию 2), всего надо наложить на коэффициенты многочленов $\omega_k(\lambda)$ в формуле (1.17)

$$K+(n-1)L=nL+m_1+m_2+\ \ldots\ +m_n \tag{1.27}$$

линейных связей. Но это число точно совпадает с наибольшим числом всех коэффициентов многочленов $\omega_k(\lambda)$, $k=1,\ \ldots,\ n$, допускаемых условием 1). Таким образом, окончательное вычисление всех функций $\Phi_k(\lambda)$, $k=1,\ \ldots,\ n$ сводится к решению системы $K+(n-1)L$ линейных уравнений с $K+(n-1)L$ неизвестными, однозначно определяющей все коэффициенты многочленов $\omega_k(\lambda)$ *.

Если некоторые корни θ_i совпадают между собой, то указанная система уравнений может несколько изменить свой вид. Возможно, например, что при некотором θ_i только $n-2$ из уравнений (1.18) будут линейно независимыми, но придется еще потребовать, чтобы производные всех функций $\omega_1(\lambda)f_{1k}(\lambda)+\ \ldots\ +\omega_n(\lambda)f_{nk}(\lambda)$ в точке $\lambda=\theta_i$ обращались в нуль, что даст нам еще n (а не $n-1$) уравнений. Однако и в этом случае получаемая система однозначно определяет все коэффициенты $\omega_k(\lambda)$; в самом деле, всегда можно сперва слегка возмутить параметры спектральной матрицы так, чтобы корни θ_i стали все различными, затем решить систему уравнений для новой спектральной матрицы и, в заключение приравнять коэффициенты в $\omega_k(\lambda)$ пределам полученных решений при стремящемся к нулю возмущении.

---

* Единственность этих коэффициентов сразу следует из факта единственности решения $\widetilde{\xi}_1(t,\tau)$ задачи экстраполяции в пространстве H. Для доказательства существования решения в силу свойств линейных уравнений достаточно показать, что решение (единственное) существует хоть при одном τ; но при $\tau=0$ таким решением очевидно будет $\omega_1(\lambda)=(\lambda-\theta_1)\ \ldots\ (\lambda-\theta_L)$, $\omega_j(\lambda)=0$ при $j\neq 1$.

Исходя из формул (1.17) и (1.13) очень просто получается также явное выражение функционала $\widetilde{\xi}_1(t, \tau)$. Действительно, каждую из функции $\Phi_k(\lambda)$ можно представить в виде:

$$\Phi_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_k-1} W_k^{(j)} (i\lambda)^j + \int_0^\infty e^{-is\lambda} w_k(s)\, ds, \tag{1.28}$$

где $\Phi_k(\lambda) - \sum W_k^{(j)} (i\lambda)^j$ — функция из L_2, а $w_k(s)$ — ее преобразование Фурье. Подставляя (1.28) в (1.13), найдем, что

$$\widetilde{\xi}_1(t, \tau) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=0}^{m_k-1} W_k^{(j)} \xi_k^{(j)}(t) + \int_0^\infty w_k(s)\, \xi_k(t-s)\, ds \right]. \tag{1.29}$$

Таким образом имеет место следующая

Теорема 1. *Решение $\widetilde{\xi}_1(t, \tau)$ задачи экстраполяции невырожденного стационарного процесса с рациональным спектром дается формулой* (1.29). *Постоянные $W_k^{(j)}$ и функция $w_k(s)$ в этой формуле однозначно подбираются из условия, чтобы все функции* (1.28) *имели вид* (1.17), *где $\theta_1, \ldots, \theta_L$ — нули $D(\lambda)$ в верхней полуплоскости, а $\omega_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$ — многочлены соответственно не выше, чем $(L - m_k - 1)$-й степени с коэффициентами, определяемыми системой $nL - m_1 - \ldots - m_n$ линейных уравнений, вытекающей из условия аналитичности всех функций* (1.16) *в верхней полуплоскости.*

После того как все $\Phi_k(\lambda)$ определены, очень легко также подсчитать средний квадрат ошибки экстраполяции $\sigma_1^2(\tau)$ (см. (1.9)): в силу (1.13) и (1.12) этот квадрат ошибки здесь равен:

$$\sigma_1^2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{11}(\lambda)\, d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k,j=1}^{n} \Phi_k(\lambda) \overline{\Phi_j(\lambda)}\, f_{kj}(\lambda) \right\} d\lambda =$$

$$= B_{11}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k,j=1}^{n} \Phi_k(\lambda) \overline{\Phi_j(\lambda)}\, f_{kj}(\lambda) \right\} d\lambda. \tag{1.30}$$

Замечание. Пусть теперь $\boldsymbol{\xi}(t)$ — вырожденный стационарный процесс с рациональным спектром такой, что для него $D(\lambda)$ обращается в нуль в некоторых точках вещественной оси. В силу неотрицательности функции $D(\lambda)$ все ее вещественные нули будут иметь четный порядок. Включим в число нулей $\theta_1, \ldots, \theta_L$ также и ровно половину вещественных корней уравнения $D(\lambda) = 0$. В таком случае все коэффициенты многочленов $\omega_k(\lambda)$ в формуле (1.17) снова можно будет однозначно определить из условия, чтобы функция возрастала на бесконечности не быстрее, чем $|\lambda|^{m_k-1}$ и чтобы функции $\Psi_k(\lambda)$ не имели особенностей во всей верхней полуплоскости включая вещественную ось). Полученные функции $\Phi_k(\lambda)$, очевидно, будут пределами некоторой последовательности $\Phi_k^{(n)}(\lambda)$, $n = 1, 2 \ldots$, дающей решение задачи экстраполяции для последовательности невырожденных процессов с рациональной спектральной плотностью. Но дают ли они решение задачи экстраполяции для нашего вырожденного процесса?

Подставив непосредственно наши $\Phi_k(\lambda)$ в формулу (1.13) мы рискуем получить бессмысленное выражение: если, например, вещественные нули

$D(\lambda)$ не совпадают с нулями никаких $f_{kk}(\lambda)$, то интегралы в правой части (1.13) не будут существовать как интегралы в среднем квадратичном (ибо условие (1.14) здесь не будет выполняться). Нетрудно показать, однако, что интеграл

$$\widetilde{\xi}_1(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(\lambda)\, dZ_k(\lambda) \right\} \tag{1.31}$$

(понимаемый как предел в среднем квадратичном интегральных сумм Стилтьеса для всего подынтегрального выражения) будет иметь смысл. В самом деле, для существования интеграла (1.31) нужно лишь, чтобы выполнялось условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k,j=1}^{n} \Phi_k(\lambda) \overline{\Phi_j(\lambda)} f_{kj}(\lambda) \right\} d\lambda < \infty, \tag{1.32}$$

а в (1.32) подынтегральная функция уже не будет иметь особенностей на вещественной оси в силу (1.18). Легко видеть, что (1.31) и будет как раз решением задачи экстраполяции для нашего вырожденного стационарного процесса с рациональным спектром.

Для того чтобы можно было считать нашу задачу экстраполяции эффективно решенной, надо еще представить выражение (1.31) в виде функционала от значений всех процессов $\xi_k(t')$ в прошлом (при $t' \leqslant t$). Нетрудно понять, однако, что в данном случае $\widetilde{\xi}_1(t, \tau)$ никак нельзя представить в виде (1.29). Единственно, что можно сделать исходя из наших формул — это представить $\widetilde{\xi}_1(t, \tau)$ в виде предела (в среднем квадратичном) последовательности функционалов вида правой части (1.29) (разумеется, такое представление будет далеко не однозначно).

Аналогично обстоит дело и в случае вырождения, заключающегося в том, что старшие члены многочлена в числителе $D(\lambda)$ взаимно сокращаются. В этом случае условие (1.32) позволяет выбрать в качестве $\Phi_k(\lambda)$ функции, возрастающие на бесконечности быстрее, чем $|\lambda|^{m_k - 1}$. При таком подборе число неизвестных коэффициентов у $\omega_k(\lambda)$ снова окажется равным $nL + m_1 + \ldots + m_n$, где L — то же, что и раньше (несмотря на то, что степень знаменателя $D(\lambda)$ здесь меньше L — у $D(\lambda)$ «не хватает нулей»). Дальнейшее решение вполне аналогично решению для невырожденного случая с той только разницей, что здесь опять $\widetilde{\xi}_1(t, \tau)$ дается формулой (1.31) и не может быть представлено в виде (1.29) (а лишь в виде предела последовательности подобных функционалов).

2. Экстраполяция процесса, заданного на конечном интервале

Задача линейной экстраполяции процесса $\xi(t)$, заданного на конечном интервале $[t - T, t]$ временной оси, состоит в нахождении линейного функционала $\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)$ от значений $\xi_k(t')$, $k = 1, \ldots, n$, $t - T \leqslant t' \leqslant t$, дающего наилучшее (в смысле метода наименьших квадратов) приближение к $\xi_1(t + \tau)$, $\tau > 0$. Ясно, что в данном случае $\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)$ совпадает с (единственным) перпендикуляром, опущенным в H из точки $\xi_1(t + \tau)$ на подпространство

$$H_\xi(t, T) = [\xi_k(t'),\ k = 1, \ldots, n,\ t - T \leqslant t' \leqslant t], \tag{2.}$$

натянутое на векторы, указанные в квадратной скобке. Поэтому элемент $\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)$ однозначно определяется следующими двумя условиями:

а) $$\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T) \in H_\xi(t, T) \tag{2.2}$$

б) $$\mathbf{M}[\xi_1(t+\tau) - \widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)]\,\overline{\xi_k(t')} \text{ при } k = 1, \ldots, n \text{ и } t - T \leqslant t' \leqslant t. \tag{2.3}$$

В случае невырожденных процессов $\xi(t)$ с рациональным спектром $\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)$ можно подбирать из числа величин вида (1.13)

$$\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T) = \sum_{k\ 1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Phi_k(\lambda)\, dZ_k(\lambda), \tag{2.4}$$

где все интегралы справа понимаются в среднем квадратичном, так что

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(\lambda)|^2 f_{kk}(\lambda)\, d\lambda < \infty, \quad k = 1, \ldots, n \tag{2.5}$$

условие б) при этом оказывается равносильным равенству:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} \Psi_k(\lambda)\, d\lambda = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \quad 0 \leqslant s \leqslant T, \tag{2.6}$$

где $\Psi_k(\lambda)$ дается формулой (1.16). Легко видеть, что для справедливости (2.6) достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

2) *Все функции* $\Psi_k(\lambda)$ *могут быть представлены в виде*

$$\Psi_k(\lambda) = \Psi_k^{(1)}(\lambda) + e^{-iT\lambda} \Psi_k^{(2)}(\lambda), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.7}$$

где $\Psi_k^{(1)}(\lambda)$ *— функции комплексного переменного, аналитические в верхней полуплоскости,* $\Psi_k^{(2)}(\lambda)$ *— функции, аналитические в нижней полуплости и все* $\Psi_k^{(1)}(\lambda)$, $\Psi_k^{(2)}(\lambda)$ *при* $|\lambda| \to \infty$ *в соответствующей полуплоскости убывают не медленнее, чем* $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (см. [11]). Что же касается условия а), то оно наверное будет выполняться, если все интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Phi_k(\lambda)\, dZ_k(\lambda)$ будут зависеть лишь от значений $\xi_k(t')$ при $t - T \leqslant t' \leqslant t$. Последнего можно добиться, потребовав, чтобы выполнялось условие:

3) *Функции* $\Phi_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$ *все являются аналитическими во всей плоскости (целыми) функциями комплексного переменного* λ, *представимыми в виде*

$$\Phi_k(\lambda) = \Phi_k^{(1)}(\lambda) + e^{-iT\lambda} \Phi_k^{(2)}(\lambda), \tag{2.8}$$

где $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ *и* $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ *— рациональные функции, возрастающие при* $|\lambda| \to \infty$ *не быстрее, чем конечная степень* $|\lambda|$ (см. [11]). Нам остается только подобрать функции $\Phi_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие этим условиям 1), 2) и 3).

Подставляя (2.8) в (1.16) и сравнивая с (2.7), найдем, что при $\tau > 0$ следует положить

$$\Psi_k^{(1)}(\lambda) = [e^{i\tau\lambda} - \Phi_1^{(1)}(\lambda)] f_{1k}(\lambda) - \sum_{j=2}^{n} \Phi_j^{(1)}(\lambda) f_{jk}(\lambda), \quad (2.9$$

$$\Psi_k^{(2)}(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n} \Phi_j^{(2)}(\lambda) f_{jk}(\lambda). \quad (2.10$$

Поскольку функция $\Phi_k(\lambda)$ должна быть целой, то все полюса функции $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ должны совпадать с полюсами $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$. Далее из (2.9) и (2.10) легко выводится, что для того чтобы некоторый полюс $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ не был одновременно полюсом функции $\Psi_k^{(1)}(\lambda)$ (если он расположен в верхней полуплоскости) или полюсом $\Psi_k^{(2)}(\lambda)$ (если он расположен в нижней полуплоскости), он должен совпадать с нулем детерминанта $D(\lambda)$ спектральной матрицы процесса $\xi(t)$. Таким образом в данном случае следует положить

$$\Phi_k^{(i)}(\lambda) = \frac{\omega_k^{(i)}(\lambda)}{(\lambda-\theta_1)\dots(\lambda-\theta_L)(\lambda-\overline{\theta_1})\dots(\lambda-\overline{\theta_L})}, \quad k=1, \dots, n, \ i=1, 2, \quad (2.11$$

где $\theta_1, \dots, \theta_L, \overline{\theta}_1, \dots, \overline{\theta}_L$ — всевозможные корни уравнения $D(\lambda) = 0$. Для того чтобы было выполнено условие (1) степени многочленов $\omega_k^{(1)}(\lambda)$ и $\omega_k^{(2)}(\lambda)$ не должны превосходить $2L + m_k - 1$. Таким образом, воспользовавшись формулами (2.11) мы будем иметь в своем распоряжении $4nL + 2(m_1 + \dots + m_n)$ произвольных коэффициентов. Для того чтобы все функции (2.8) были целыми, должны выполняться следующие равенства

$$\omega_k^{(1)}(\lambda) + e^{iT\lambda}\omega_k^{(2)}(\lambda) = 0, \ k=1, \dots, n; \ \lambda = \theta_1, \dots, \theta_L, \overline{\theta}_1, \dots, \overline{\theta}_L \quad (2.12$$

— это дает нам $2nL$ линейных уравнений относительно коэффициентов многочленов $\omega_k^{(i)}(\lambda)$ (если часть корней θ_i совпадает между собой, то меняется лишь вид уравнений (2.12), но не их число). После этого нам остается только позаботиться, чтобы выполнялось условие 2).

Дальнейшие рассуждения очень близки к тем, которые мы приводили в § 1. Для того чтобы все функции $\Psi_k^{(1)}(\lambda)$, $k=1, \dots, n$ не имели полюсов в точках $\lambda = \alpha_{jk}^{(m)}$, $m=1, \dots, N_{jk}$; $j=1, \dots, n$, коэффициенты многочленов $\omega_k^{(1)}(\lambda)$ должны удовлетворять некоторым $K = L + \sum m_k$ линейным уравнениям. Аналогично этому требование, чтобы все функции $\Psi_k^{(2)}(\lambda)$, $k=1, \dots, n$ не имели особенностей при $\lambda = \overline{\alpha_{kj}^{(m)}}$, $m=1, \dots, N_{kj}$, $j=1, \dots, n$, дает нам K линейных уравнений, которым должны удовлетворять коэффициенты многочленов $\omega_k^{(2)}(\lambda)$. Наконец, для того чтобы точки $\lambda = \theta_i$, $i=1, \dots, L$ не были полюсами функций $\Psi_k^{(1)}(\lambda)$, должны выполняться соотношения:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(1)}(\theta_i) f_{jk}(\theta_i) = 0, \ k=1, \dots, n; \quad (2.13$$

а для того, чтобы точки $\lambda = \overline{\theta}_i$ не были полюсами функций $\Psi_k^{(2)}(\lambda)$, должны выполняться соотношения:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(2)}(\overline{\theta}_i) f_{jk}(\overline{\theta}_i) = 0, \ k=1, \dots, n; \ i=1, \dots, L. \quad (2.14$$

Если все корни θ_i различны между собой, то уравнения (2.13) равносильны $(n-1)L$ линейным уравнениям относительно коэффициентов многочленов $\omega_k^{(1)}(\lambda)$, а уравнения (2.14) — $(n-1)L$ линейным уравнениям относительно коэффициентов $\omega_k^{(2)}(\lambda)$. Окончательно мы получаем, таким образом, систему

$$2nL + 2K + 2(n-1)L = 4nL + 2(m_1 + \ldots + m_n) \qquad (2.15)$$

линейных уравнений, однозначно определяющую $4nL + 2(m_1 + \ldots + m_n)$ неизвестных коэффициентов многочленов $\omega_k^{(1)}(\lambda)$ и $\omega_k^{(2)}(\lambda)$ (ср. сноску на стр. 272, полностью приложимую и в данном случае). Если некоторые корни θ_i совпадают между собой, то система уравнений может несколько измениться, но конечный вывод остается тем же самым.

Для того чтобы получить явный вид функционала $\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)$, удобно выделить из $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ многочленные части, т. е. представить $\Phi_k(\lambda)$ в виде

$$\Phi_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_k-1} [W_k^{(j)} + W_{k,1}^{(j)} e^{-iT\lambda}] (i\lambda)^j + \varphi_k(\lambda), \qquad (2.16)$$

где $\varphi_k(\lambda)$ — функция из L_2. Воспользовавшись далее аналитическими свойствами $\Phi_k(\lambda)$ нетрудно показать, что преобразование Фурье $w_k(s)$ функции $\varphi_k(\lambda)$ обращается в нуль при $s > 0$ и при $s < -T$, так что (2.16) можно также переписать в виде

$$\Phi_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_k-1} [W_k^{(j)} + W_{k,1}^{(j)} e^{-iT\lambda}] (i\lambda)^j + \int_0^T e^{-is\lambda} w_k(s)\, ds. \qquad (2.17)$$

Подставляя последнюю формулу в (2.4), найдем

$$\widetilde{\xi}(t, \tau, T) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=0}^{m_k-1} [W_k^{(j)} \xi_k^{(j)}(t) + W_{k,1}^{(j)} \xi_k^{(j)}(t-T)] + \int_0^T w_k(s)\, \xi_k(t-s)\, ds \right\}. \qquad (2.18)$$

Полученные результаты могут быть сформулированы в виде следующей теоремы:

Теорема 2. *Решение $\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)$ задачи линейной экстраполяции невырожденного стационарного процесса с рациональным спектром, заданного на конечном интервале $[t-T, t]$, дается формулой* (2.18). *Постоянные $W_k^{(j)}$, $W_{k,1}^{(j)}$ и функции $w_k(s)$ в этой формуле однозначно определяются из условия, чтобы все функции* (2.17) *имели вид* (2.8), *где $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ — рациональные функции* (2.11), $\theta_1, \ldots, \theta_L$ и $\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_L$ — *всевозможные нули детерминанта спектральной матрицы нашего процесса, а $\omega_k^{(1)}(\lambda)$ и $\omega_k^{(2)}(\lambda)$ — многочлены, соответственно, не выше чем $(2L + m_k - 1)$-й степени, удовлетворяющие уравнениям* (2.12), (2.13) *и* (2.14) *и еще $2K$ линейным уравнениям, вытекающим из условия аналитичности функций* (2.9) *и* (2.10) *в верхней и, соответственно, нижней полуплоскостях.*

Средний квадрат ошибки экстраполяции

$$\sigma_1^2(\tau) = \mathbf{M} |\xi_1(t+\tau) - \widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)|^2 \qquad (2.19)$$

здесь дается той же формулой (1.30), что и в случае экстраполяции с полуоси $t' \leqslant t$.

Как и в § 1 основная часть полученных результатов автоматически переносится и на случай вырожденных процессов $\xi(t)$ с рациональным спектром таким, что $D(\lambda) = 0$ в изолированных точках. Исключением являются лишь результаты о явном виде (2.18) функционала $\widetilde{\xi}_1(t, \tau, T)$, а также интерпретация формулы (2.4) (в применении к вырожденным процессам ее во многих случаях придется понимать аналогично (1.31)). Отметим еще, что в случае экстраполяции с конечного интервала (в отличие от экстраполяции с полуоси $t' \leqslant t$) нетрудно подобрать также примеры вырожденных процессов, на которые все результаты теоремы 2 переносятся без всякого изменения. Так, например, будет обстоять дело, если вырожденность заключается только в том, что спектральные плотности $f_{kk}(\lambda)$ обращаются в нуль в отдельных точках вещественной оси (тогда в этих точках, разумеется, будут равны нулю и все $f_{kj}(\lambda)$ с $j \neq k$ и $D(\lambda)$).

3. Линейная фильтрация многомерных процессов

Задача линейной фильтрации многомерного стационарного процесса $\xi(t)$ (заданного на полупрямой $t' \leqslant t$ или на конечном интервале $t - T \leqslant t' \leqslant t$) формулируется следующим образом. Пусть наряду с процессом $\xi(t)$ мы имеем некоторую случайную величину Ξ, корреляционно связанную с этим процессом. Корреляционная связь Ξ и $\xi(t)$ будет естественно характеризоваться функциями:

$$B_{\Xi k}(t) = \mathbf{M}\Xi\overline{\xi_k(t)} \tag{3.1}$$

(для простоты мы предполагаем, что $\mathbf{M}\Xi = 0$; общность при этом не уменьшается). Требуется по известной корреляционной матрице процесса $\xi(t)$ и функциям (3.1) построить линейный функционал $\widetilde{\Xi}$ от значений всех компонент процесса $\xi(t')$ при $t' \leqslant t$ или же при $t - T \leqslant t' \leqslant t$, дающий наилучшее (в смысле метода наименьших квадратов) приближение к Ξ.

Воспользовавшись спектральным разложением (1.7) процесса $\xi_k(t)$ нетрудно показать, что функция $B_{\Xi k}(t)$ всегда может быть представлена в виде

$$B_{\Xi k}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} f_{\Xi k}(\lambda)\, d\lambda, \tag{3.2}$$

где $f_{\Xi k}(\lambda)$ — комплексная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_{\Xi k}(\lambda)|^2}{f_{kk}(\lambda)}\, d\lambda < \infty \tag{3.3}$$

(ср., например, вывод формулы (3.51) в [12]). Методы, развитые в §§ 1 – настоящей статьи, позволяют эффективно решить задачу фильтрации, если только процесс $\xi(t)$ имеет рациональный спектр (и является невырожденным), а все функции $f_{\Xi k}(\lambda)$ имеют вид:

$$f_{\Xi k}(\lambda) = \sum_{r=1}^{R} q_{rk}(\lambda)\, e^{it_r\lambda}. \tag{3.4}$$

где $t_1, \ldots, t_R$ — вещественные числа, а $q_{1k}(\lambda), \ldots, q_{Rk}(\lambda)$ — рациональны

функции, не имеющие вещественных полюсов (некоторые из этих функций могут обращаться в нуль).

В самом деле, искомое наилучшее приближение $\widetilde{\Xi}$, очевидно, совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного в H из точки Ξ на подпространство $H_\xi(t)$ (в случае фильтрации процесса, заданного на полупрямой) или на $H_\xi(t, T)$ (в случае, когда $\xi(t')$ задано лишь на интервале $t - T \leqslant t' \leqslant t$). Таким образом, $\widetilde{\Xi}$ однозначно задается условиями:

а) $\widetilde{\Xi} \in H_\xi(t)$ или, соответственно, $\widetilde{\Xi} \in H_\xi(t, T)$

б) $\mathbf{M}[\Xi - \widetilde{\Xi}]\overline{\xi_k(t')} = 0$ при всех $k = 1, \ldots, n$ и $t' \leqslant t$ или, соответственно, $t - T \leqslant t' \leqslant t$. Если мы будем искать $\widetilde{\Xi}$ в виде

$$\widetilde{\Xi} = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Phi_k(\lambda)\, dZ_k(\lambda), \tag{3.5}$$

то для существования интегралов (в смысле среднего квадратичного) надо будет потребовать, чтобы выполнялись неравенства

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(\lambda)|^2 f_{kk}(\lambda)\, d\lambda < \infty, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.6}$$

а условиям а) и б) можно будет удовлетворить, наложив некоторые ограничения на поведение функций $\Phi_k(\lambda)$ при комплексных значениях аргумента λ.

Заметим прежде всего, что условие б) равносильно соотношению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} \left\{ \sum_{r=1}^{R} e^{i(t_r - t)\lambda} q_{rk}(\lambda) - \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(\lambda) f_{jk}(\lambda) \right\} d\lambda = 0 \tag{3.7}$$

$k = 1, \ldots, n$; $s \geqslant 0$ или, соответственно, $0 \leqslant s \leqslant T$. Далее мы отдельно рассмотрим задачу фильтрации процесса, заданного на полуоси $t' \leqslant t$ и задачу фильтрации процесса, заданного на интервале $t - T \leqslant t' \leqslant t$.

В случае, когда нам надо найти наилучшее приближение $\widetilde{\Xi}$, линейно зависящее от всех $\xi_k(t')$, $t' \leqslant t$, условия а) и б) наверное будут иметь место, если только

2) *Функции*

$$\Psi_k(\lambda) = \sum_{r=1}^{R} e^{i(t_r - t)\lambda} q_{rk}(\lambda) - \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(\lambda) f_{jk}(\lambda), \quad k = 1, \ldots, n \tag{3.8}$$

все могут быть аналитически продолжены (без особенностей) в верхнюю полуплоскость так, чтобы при $|\lambda| \to \infty$ в этой полуплоскости они убывали не медленнее, чем $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$;

3) *Функции $\Phi_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, все могут быть аналитически продолжены в нижнюю полуплоскость так, чтобы при $|\lambda| \to \infty$ в этой полуплоскости они возрастали не быстрее, чем степенным образом.*

При подборе функций $\Phi_k(\lambda)$, удовлетворяющих всем условиям 1), 2) и 3), удобно представить все числа t_r в виде $t_r = t + \tau_r$, и записать сумму (3.4) в следующем виде:

$$f_{\Xi k}(\lambda) = e^{it\lambda} \left\{ \sum_{r=1}^{R_1} q_{rk}(\lambda) e^{i\tau_r\lambda} + \sum_{R_1+1}^{R} q_{rk}(\lambda) e^{i\tau_r\lambda} \right\}, \tag{3.9}$$

где $\tau_r < 0$ при $r = 1, \ldots, R_1$ и $\tau_r \geqslant 0$ при $r = R_1 + 1, \ldots, R$. Заметим теперь, что в силу условий 3) и 2) функции $\Phi_k(\lambda)$ могут содержать лишь экспоненциальные выражения $e^{i\tau\lambda}$ с отрицательными показателями τ, а функции $\Psi_k(\lambda)$ — только экспоненциальные выражения с положительными показателями. Поэтому функции $\Phi_k(\lambda)$ естественно искать в следующем виде:

$$\Phi_k(\lambda) = \sum_{r=1}^{R_1} \varphi_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r\lambda} + \Phi_k^*(\lambda), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.10}$$

где $\varphi_{rk}(\lambda)$, $r = 1, \ldots, R_1$ и $\Phi_k^*(\lambda)$ — рациональные функции. При этом функции $\varphi_{rk}(\lambda)$ однозначно определяются из условия, чтобы в (3.8) сократились все экспоненты с положительными показателями, т. е. из условий:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{rj}(\lambda)\, f_{jk}(\lambda) = q_{rk}(\lambda), \quad k = 1, \ldots, n; \; r = 1, \ldots, R_1. \tag{3.11}$$

При фиксированном r равенства (3.11) дают нам линейную систему n уравнений с n неизвестными $\varphi_{rj}(\lambda)$, детерминант которой равен $D(\lambda) > 0$; отсюда немедленно находятся явные выражения всех рациональных функций $\varphi_{rj}(\lambda)$. При этом в силу условия (3.3) функции $|\varphi_{rk}(\lambda)|^2 f_{kk}(\lambda)$ при всех r и k будут интегрируемыми; поэтому, для того чтобы выполнялось условие 1), надо только, чтобы степень числителя рациональной функции $\Phi_k^*(\lambda)$ превосходила степень ее знаменателя не больше, чем на $m_k - 1$. Последнее условие одновременно гарантирует и нужный порядок роста при $|\lambda| \to \infty$ (в соответствующей полуплоскости) функций $\Psi_k(\lambda)$.

Приведем теперь к общему знаменателю все рациональные функции $\varphi_{rk}(\lambda)$, $r = 1, \ldots, R'$, $k = 1, \ldots, n$; в силу самого определения этих функций в число нулей указанного общего знаменателя войдут, вообще говоря, и все нули детерминанта $D(\lambda)$. В результате сумму в правой части (3.10) можно будет записать в виде

$$\sum_{r=1}^{R_1} \varphi_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r\lambda} = \frac{A_k(\lambda)}{Q(\lambda)\, C(\lambda)\, C^{(1)}(\lambda)}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.12}$$

где $Q(\lambda)$ — то же, что и в (1.6), $C(\lambda)$ — какой-то (не зависящий от k) многочлен с нулями в верхней полуплоскости, $C^{(1)}(\lambda)$ — многочлен (степени ν), все нули которого расположены в нижней полуплоскости, а $A_k(\lambda)$ — линейная комбинация функций $e^{i\tau_r\lambda}$, $r = 1, \ldots, R_1$, с полиномиальными коэффициентами (вещественных полюсов выражение (3.12), очевидно, не может иметь). Аналогично этому представим вторую сумму в правой части (3.9) в виде:

$$\sum_{r=R_1+1}^{R} q_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r\lambda} = \frac{B_k(\lambda)}{E(\lambda)\, E^{(1)}(\lambda)}, \quad k = 1 \ldots n, \tag{3.13}$$

где $E(\lambda)$ — какой-то (не зависящий от k) многочлен степени μ, все нули которого расположены в верхней полуплоскости, а $E^{(1)}(\lambda)$ — многочлен, все нули которого расположены в нижней полуплоскости. Нетрудно понять,

то интересующие нас рациональные функции $\Phi_k^*(\lambda)$ следует искать в виде:

$$\Phi_k^*(\lambda) = \frac{\omega_k(\lambda)}{Q(\lambda)\, C^{(1)}(\lambda)\, E(\lambda)}, \tag{3.14}$$

де $\omega_k(\lambda)$ — многочлен не выше чем $(2L + \nu + \mu + m_k - 1)$-й степени.

Приняв формулы (3.14), мы будем иметь в нашем распоряжении

$$n(2L + \nu + \mu) + \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{3.15}$$

ока неопределенных коэффициентов многочленов $\omega_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$. Для того чтобы выполнялось условие 3) нули $\theta_1, \ldots, \theta_L$ многочлена $Q(\lambda)$ ν нулей многочлена $C^{(1)}(\lambda)$ в знаменателе правой части (3.10) должны ократиться с соответствующими нулями числителя, т. е. отношение

$$\frac{A_k(\lambda)\, \varepsilon(\lambda) - \omega_k(\lambda)\, C(\lambda)}{(\lambda - \theta_1) \ldots (\lambda - \theta_L)\, C^{(1)}(\lambda)} \tag{3.16}$$

ри всех $k = 1, \ldots, n$ должно быть целой функцией λ. Это условие, чевидно, равносильно $n(L + \nu)$ линейным уравнениям относительно коэффициентов многочленов $\omega_k(\lambda)$. Далее, в силу (3.8) — (3.14)

$$\Psi_k(\lambda) = \frac{B_k(\lambda)}{E(\lambda)\, E^{(1)}(\lambda)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(\lambda)}{Q(\lambda)\, C^{(1)}(\lambda)\, E(\lambda)} f_{jk}(\lambda) \tag{3.17}$$

оэтому для справедливости условия 2) функции (3.17) не должны иметь олюсов в верхней полуплоскости. Как обычно (ср. § 1) требование, чтобы ри любом k полюса $\alpha_{jk}^{(m)}$ функций $f_{jk}(\lambda)$ сократились в (3.17) с нулями ислителя, дает нам еще $K = L + m_1 + \ldots + m_n$ линейных уравнений тносительно коэффициентов многочленов $\omega_k(\lambda)$. Аналогичное требование, асающееся нулей многочлена $E(\lambda)$ в выражении для $\Psi_k(\lambda)$, дает нам еще линейных уравнений; значит при всевозможных k получаем $n\mu$ уравнений. аконец, условия отсутствия полюсов у $\Psi_k(\lambda)$ в точках $\theta_1, \ldots, \theta_L$ равносильны соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(\theta_i)}{C^{(1)}(\theta_i)\, E(\theta_i)} f_{jk}(\theta_i) = 0, \quad k = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, L, \tag{3.18}$$

е. дают нам еще $(n - 1)L$ линейных уравнений (для простоты мы считаем здесь все корни многочленов $E(\lambda)$, $D(\lambda)$ и $P_{jk}(\lambda)$ различными; изменения, возникающие в случае совпадения части этих корней являются очевидными). Итого мы получаем

$$n(L + \nu) + L + \sum_{k=1}^{n} m_k + n\mu + (n-1)L$$

инейных уравнений — ровно столько, сколько у нас было неизвестных.

Явная формула для функционала $\widetilde{\Xi}$ здесь будет иметь вид:

$$\widetilde{\Xi} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=0}^{m_k - 1} \sum_{r=0}^{R_1} W_{k,r}^{(j)} \xi_k^{(j)}(t_r) + \int_0^\infty \omega_k(s)\, \xi_k(t-s)\, ds \right\}, \tag{3.19}$$

где положено $t_0 = t$, так что $\tau_0 = 0$, а постоянные $W_{k,r}^{(j)}$ и функции $\omega_k(s)$ определяются из условия

$$\sum_{j=0}^{m_k-1}\sum_{r=0}^{R_1} W_{k,r}^{(j)} e^{i\tau_r\lambda}(i\lambda)^j + \int_0^\infty e^{is\lambda}\omega_k(s)\,ds = \sum_{r=1}^{R_1}\varphi_{rk}(\lambda)\,e^{i\tau_r\lambda} + \frac{\boldsymbol{\omega}_k(\lambda)}{Q(\lambda)\,C^{(1)}(\lambda)\,E(\lambda)}. \quad (3.20$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. *Решение* $\widetilde{\Xi}$ *задачи линейной фильтрации многомерного не вырожденного стационарного процесса с рациональным спектром в случае когда взаимная корреляция величины* Ξ *и компонент процесса дается формулами* (3.2) *и* (3.4), *имеет вид* (3.19), *где* $t_0 = t$, *а* t_r, $r = 1, \ldots, R_1$, *все меньше нуля. Постоянные* $W_{k,r}^{(j)}$ *и функции* $\omega_k(s)$ *в* (3.19) *однозначно определяются условием* (3.20), *где* $\varphi_{rk}(\lambda)$, $C^{(1)}(\lambda)$, $E(\lambda)$ *и* $Q(\lambda)$ — *находятся из формул* (3.11)—(3.13) *и* (1.6), *а* $\omega_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$ — *многочлены не выше чем* $(2L + \nu + \mu - m_k - 1)$-*й степени, коэффициенты которых являются решениями системы линейных уравнений, вытекающей из условий* 2) *и* 3)

Для того чтобы подсчитать также средний квадрат

$$\sigma^2 = \mathbf{M}\,|\,\Xi - \widetilde{\Xi}\,|^2 \quad (3.21$$

ошибки фильтрации надо еще знать величину

$$B = \mathbf{M}\,|\,\Xi\,|^2. \quad (3.22$$

А именно, имеет место следующая формула

$$\sigma^2 = B - \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j,k=1}^{n}\Phi_j(\lambda)\,\overline{\Phi_j(\lambda)}\,f_{jk}(\lambda)\right\}d\lambda \quad (3.23$$

(ср. формулу (1.30)).

На перенесении некоторых из указанных результатов на вырожденные стационарные процессы с рациональным спектром мы здесь (и всюду в дальнейшем) не будем задерживаться; в этом отношении задача фильтрации не отличается от задачи экстраполяции.

Перейдем теперь к задаче линейной фильтрации невырожденного процесса $\xi(t')$, заданного на конечном интервале $t - T \leqslant t' \leqslant t$. Рассуждая так же как в § 2, можно показать, что величина (3.5) наверное будет давать решение этой задачи, если функции $\Phi_k(\lambda)$ будут удовлетворять условию 1) (т. е. (3.6)) и следующим двум условиям:

2) *Функции* $\Psi_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, *даваемые формулой* (3.8), *все могут быть представлены в виде*

$$\Psi_k(\lambda) = \sum_{s=1}^{S_1}\psi_k^{(s)}(\lambda)\,e^{i\tau_s\lambda} + \sum_{s=S_1+1}^{S}\psi_k^{(s)}(\lambda)\,e^{i\tau_s\lambda}, \quad (3.24$$

где $\tau_s \leqslant -T$, $s = 1, \ldots, S_1$, $\tau_s \geqslant 0$, $s = S_1 + 1, \ldots, S$ *и первая сумма в правой части* (3.24) *представляет собой функцию* $\Psi_k^{(1)}(\lambda)$, *аналитическую в нижней полуплоскости, а вторая сумма — функцию* $\Psi_k^{(2)}(\lambda)$, *аналитическую в верхней полуплоскости, причем обе эти функции убывают в соответствующей полуплоскости не медленнее, чем* $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

3) *Функции* $\Phi_k(\lambda)$, $k=1, \ldots, n$ *все являются целыми функциями комплексного* λ, *представимыми в виде*

$$\Phi_k(\lambda) = \sum_{u=1}^{U} \Phi_k^{(u)}(\lambda)\, e^{-i\tau_u \lambda}, \qquad (3.25)$$

где $0 \leqslant \tau_u \leqslant T$, $u=1, \ldots, U$ *и все функции* $\Phi_k^{(u)}$, $u=1, \ldots, U$ — *рациональные* (ср. [11]).

Представим теперь функцию (3.4) в виде

$$f_{\varepsilon k}(\lambda) = e^{it\lambda}\left\{\sum_{r=1}^{R'} q_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda} + \sum_{r=R'+1}^{R''} q_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda} + \sum_{r=R''-1}^{R} q_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda}\right\}, \qquad (3.26)$$

где $\tau_r = t_r - t$ и $-T < \tau_r < 0$ при $r=1, \ldots, R'$, $\tau_r \leqslant -T$ при $r=R'+1, \ldots, R''$, и, наконец, $\tau_r > 0$ при $r=R''+1, \ldots, R$. Исходя из условий 2) и 3) функции $\Phi_k(\lambda)$ естественно подбирать в виде

$$\Phi_k(\lambda) = \sum_{r=1}^{R'} \varphi_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda} + \Phi_k^{(1)}(\lambda)\, e^{-iT\lambda} + \Phi_k^{(2)}(\lambda), \qquad (3.27)$$

где все функции $\varphi_{rk}(\lambda)$, $r=1, \ldots, R'$, $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ — рациональные. При этом функции $\varphi_{rk}(\lambda)$ сразу определяются однозначно из равенств

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{rj}(\lambda)\, f_{jk}(\lambda) = q_{rk}(\lambda), \quad k=1, \ldots, n; \; r=1, \ldots, R', \qquad (3.28)$$

имеющих тот же смысл, что и равенства (3.11), которыми мы пользовались выше. Для $\Psi_k(\lambda)$ отсюда получается выражение

$$\Psi_k(\lambda) = \sum_{r=R'+1}^{R''} q_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda} + \sum_{r=R''+1}^{R} q_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda} - \sum_{j=1}^{n} [\Phi_j^{(1)}(\lambda)\, e^{-iT\lambda} + \Phi_j^{(2)}(\lambda)]\, f_{jk}(\lambda), \qquad (3.29)$$

находящееся в полном соответствии с формулой (3.24). Отметим еще, что для справедливости всех условий, касающихся порядка роста функций $\Phi_k(\lambda)$, $\Psi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Psi_k^{(2)}(\lambda)$, надо только потребовать, чтобы при любом k степень числителя рациональных функций $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ превосходила степень знаменателя не больше чем на $m_k - 1$.

Положим аналогично (3.12) и (3.13)

$$\sum_{r=1}^{R'} \varphi_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda} = \frac{A_k(\lambda)}{Q(\lambda)\, C(\lambda)\, C^{(1)}(\lambda)}, \qquad (3.30)$$

$$\sum_{r=R'+1}^{R''} q_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda} = \frac{B_k(\lambda)}{E(\lambda)\, E^{(1)}(\lambda)}, \qquad \sum_{r=R''+1}^{R} q_{rk}(\lambda)\, e^{i\tau_r \lambda} = \frac{G_k(\lambda)}{H(\lambda)\, H^{(1)}(\lambda)}. \qquad (3.31)$$

где $Q(\lambda)$ имеет тот же смысл, что и в (1.6), $C(\lambda)$, $E(\lambda)$ и $H(\lambda)$ — какие-то многочлены, все нули которых расположены в верхней полуплоскости, $C^{(1)}(\lambda)$, $E^{(1)}(\lambda)$ и $H^{(1)}(\lambda)$ — многочлены, все нули которых расположены

в нижней полуплоскости. Будем искать рациональные функции $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ среди функций вида:

$$\Phi_k^{(1)}(\lambda) = \frac{\omega_k^{(1)}(\lambda)}{Q(\lambda)\,C(\lambda)\,E^{(1)}(\lambda)H(\lambda)}, \quad \Phi_k^{(2)}(\lambda) = \frac{\omega_k^{(2)}(\lambda)}{Q(\lambda)\,C^{(1)}(\lambda)\,E^{(1)}(\lambda)\,H(\lambda)}. \tag{3.32}$$

Здесь $\omega_k^{(1)}(\lambda)$ и $\omega_k^{(2)}(\lambda)$ — многочлены степеней $2L + \nu + \mu^{(1)} + \mu + m_k - 1$ и, $2L + \nu^{(1)} + \mu^{(1)} + \mu + m_k - 1$, соответственно, где через ν, $\nu^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ и μ обозначены степени многочленов $C(\lambda)$, $C^{(1)}(\lambda)$, $E^{(1)}(\lambda)$ и $H(\lambda)$. Таким образом, в формулы (3.32) входит

$$2n(2L + \mu + \mu^{(1)}) + n(\nu + \nu^{(1)}) + 2\sum_{k=1}^{n} m_k \tag{3.33}$$

произвольных коэффициентов, которыми мы можем распорядиться по своему усмотрению.

Для того чтобы выполнялось условие 3), все нули знаменателя функции (3.27) должны сократиться с нулями не низшей степени числителя. Иначе говоря, отношения

$$\frac{A_k(\lambda)\,E^{(1)}(\lambda)\,H(\lambda) + C^{(1)}(\lambda)\,\omega_k^{(1)}(\lambda)\,e^{-iT\lambda} + C(\lambda)\,\omega_k^{(2)}(\lambda)}{Q(\lambda)\,C(\lambda)\,C^{(1)}(\lambda)},$$

$$\frac{C^{(1)}(\lambda)\,\omega_k^{(1)}(\lambda)\,e^{-iT\lambda} + C(\lambda)\,\omega_k^{(2)}(\lambda)}{E^{(1)}(\lambda)\,H(\lambda)} \tag{3.34}$$

оба должны быть целыми функциями λ. Учитывая, что k может принимать значения $1, \ldots, n$, это дает нам $n(2L + \nu + \nu^{(1)} + \mu + \mu^{(1)})$ уравнений, связывающих коэффициенты всех многочленов $\omega_k^{(1)}(\lambda)$ и $\omega_k^{(2)}(\lambda)$.

Что же касается условия 2), то для того чтобы оно имело место, все функции

$$\Psi_k^{(1)}(\lambda) = \frac{B_k(\lambda)}{E(\lambda)\,E^{(1)}(\lambda)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j^{(1)}(\lambda)\,e^{-iT\lambda}}{Q(\lambda)\,C(\lambda)\,E^{(1)}(\lambda)\,H(\lambda)}\,f_{jk}(\lambda) \tag{3.35}$$

не должны иметь полюсов в нижней полуплоскости, а все функции

$$\Psi_k^{(2)}(\lambda) = \frac{G_k(\lambda)}{H(\lambda)\,H^{(1)}(\lambda)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j^{(2)}(\lambda)}{Q(\lambda)\,C^{(1)}(\lambda)\,E^{(1)}(\lambda)\,H(\lambda)}\,f_{jk}(\lambda) \tag{3.36}$$

— в верхней полуплоскости. Нетрудно подсчитать, что первое из этих условий дает нам

$$K + n\mu^{(1)} + (n-1)L = n(L + \mu^{(1)}) + \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{3.37}$$

линейных связей между коэффициентами многочленов $\omega_k^{(1)}(\lambda)$, $\omega_k^{(2)}(\lambda)$, а второе даст

$$K + n\mu + (n-1)L = n(L + \mu) + \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{3.38}$$

линейных связей между коэффициентами тех же многочленов. Окончательно мы получаем ровно столько линейных уравнений сколько имеется неизвестных и можем однозначно определить эти коэффициенты.

Явная формула для функционала $\widetilde{\Xi}$ здесь, очевидно, будет иметь вид:

$$\widetilde{\Xi} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=0}^{m_k-1} \sum_{r=-1}^{R'} W_{k,r}^{(j)} \xi_k^{(j)}(t_r) + \int_0^T w_k(s)\, \xi_k(t-s)\, ds \right\}, \qquad (3.39)$$

где положено $t_0 = t$, $t_{-1} = t - T$, а постоянные $W_{k,r}^{j}$ и функции $w_k(s)$ определяются из соотношения

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} \sum_{r=-1}^{R'} W_{k,r}^{(j)} e^{i\tau_r\lambda} (i\lambda)^j + \int_0^T e^{-is\lambda} w_k(s)\, ds = \Phi_k(\lambda), \qquad (3.40)$$

где $\tau_0 = 0$, $\tau_{-1} = -T$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4. *Если $\xi(t)$ — невырожденный стационарный процесс с рациональным спектром, заданный для $t - T \leqslant t' \leqslant t$, а Ξ — случайная величина, корреляционная связь которой с процессом $\xi(t)$ дается формулами* (3.2) *и* (3.4), *то решение задачи фильтрации процесса $\xi(t)$ имеет вид* (3.39), *где положено $t_0 = t$, $t_{-1} = t - T$, а t_r, $r = 1, \ldots, R'$ — это те из значений t_r в формуле* (3.4), *которые удовлетворяют условию $t - T < t_r < t$. При этом постоянные $W_{k,r}^{(j)}$ и функции $w_k(s)$ в* (3.39) *однозначно определяются условием* (3.40), *где функции $\Phi_k(\lambda)$ находятся из формул* (3.27) — (3.28) *и* (3.30) — (3.32), *а $\omega_k^{(1)}(\lambda)$ и $\omega_k^{(2)}(\lambda)$ — многочлены не выше чем $(2L + \nu^{(1)} + \mu^{(1)} + \mu + m_k - 1)$-й и, соответственно, $(2L + \nu^{(1)} + \mu^{(1)} + \mu + m_k - 1)$-й степени, коэффициенты которых являются решениями системы линейных уравнений, следующей из условий* 2) *и* 3) *на стр.* 282—283.

Средний квадрат σ^2 ошибки фильтрации процесса $\xi(t)$, заданного на конечном интервале, может быть подсчитана с помощью той же формулы (3.23), которой мы пользовались в случае фильтрации процесса, заданного на полуоси $t' \leqslant t$. Разумеется, при этом под функциями $\Phi_k(\lambda)$ теперь надо понимать функции (3.27), а не функции (3.10), которые мы имели в виду при выводе формулы (3.23).

4. Линейная интерполяция многомерных процессов

Задача линейной интерполяции процесса $\xi(t')$, заданного на двух полуосях $t' \leqslant t$ и $t' \geqslant t + \tau$, заключается в нахождении линейного функционала $\widetilde{\xi}_1^*(t, \tau)$, $0 < \tau < T$ от всех значений $\xi_k(t')$ при $t' \leqslant t$ или при $t' \geqslant t + T$, дающего наилучшее приближение к неизвестному нам значению $\xi_1(t + \tau)$. Задача эта возникает в тех случаях, когда по каким-либо причинам наблюдение над процессом $\xi(t)$ было прервано на промежуток времени от t до $t + T$ и требуется восстановить одно из пропущенных значений процесса по имеющимся данным.

В данном случае $\xi_1(t+\tau) - \widetilde{\xi}_1^*(t, \tau)$ будет представлять собой перпендикуляр, опущенный в H из точки $\xi_1(t+\tau)$ на подпространство

$$H^*(t, T) = [\xi_k(t'),\ k = 1, \ldots, n,\ t' \leqslant t \text{ или } t' \geqslant t+T]. \qquad (4.1)$$

Таким образом, основные условия, однозначно определяющие $\widetilde{\xi}_1^*(t, \tau)$, здесь имеют вид:

а) $$\widetilde{\xi}_1^*(t, \tau) \in H^*(t, T)$$

б) $$\mathbf{M}[\xi_1(t+\tau) - \widetilde{\xi}_1^*(t, \tau)]\overline{\xi_k(t')} = 0,\ k = 1, \ldots, n,\ t' \leqslant t \text{ или } t' \geqslant t+T.$$

Будем, как всегда, искать наилучшее приближение в виде:

$$\widetilde{\xi}_1^*(t, \tau) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\Phi_k(\lambda)\, dZ_k(\lambda), \qquad (4.2)$$

где

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(\lambda)|^2 f_{kk}(\lambda)\, d\lambda < \infty,\ k = 1, \ldots, n. \qquad (4.3)$$

При этом условие б) обратится в равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\left\{[e^{i\tau\lambda} - \Phi_1(\lambda)]\, f_{1k}(\lambda) - \sum_{j=2}^{n} \Phi_j(\lambda)\, f_{jk}(\lambda)\right\} d\lambda = 0 \qquad (4.4)$$

при $k = 1, \ldots, n$ и $s \geqslant 0$ или $s \leqslant -T$.

Что же касается условия а), то оно будет выполнено, если $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\Phi_k(\lambda)\, dZ_k(\lambda)$ будет зависеть лишь от значений $\xi_k(t')$ при $t' \leqslant t$ и при $t' \geqslant t+T$ (но не при $t < t' < t+T$).

Воспользовавшись теоремой Коши нетрудно проверить, что оба эти условия будут выполнены, если только функции $\Phi_k(\lambda)$ можно будет продолжить в комплексную плоскость так, чтобы выполнялись условия

2) *Функции*

$$\Psi_k(\lambda) = [e^{i\tau\lambda} - \Phi_1(\lambda)]\, f_{1k}(\lambda) - \sum_{j=2}^{n} \Phi_j(\lambda)\, f_{jk}(\lambda),\ k = 1, \ldots, n \qquad (4.5)$$

все являются аналитическими во всей плоскости (целыми) функциями комплексного переменного λ, *представимыми в виде*

$$\Psi_k(\lambda) = \Psi_k^{(1)}(\lambda) + e^{iT\lambda}\Psi_k^{(2)}(\lambda), \qquad (4.6)$$

где $\Psi_k^{(1)}(\lambda)$ *и* $\Psi_k^{(2)}(\lambda)$ *- рациональные функции, убывающими при* $|\lambda| \to \infty$ *не медленнее, чем* $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (*а, значит, и не медленнее, чем* $|\lambda|^{-2}$),

3) *Каждая из функций* $\Phi_k(\lambda)$ *представима в виде*

$$\Phi_k(\lambda) = \Phi_k^{(1)}(\lambda) + e^{iT\lambda}\Phi_k^{(2)}(\lambda), \qquad (4.7)$$

где функция $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ *аналитическая в нижней полуплоскости, функция* $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ *аналитическая в верхней полуплоскости, и обе они убывают при*

$|\lambda| \to \infty$ *в соответствующей полуплоскости не быстрее, чем конечная степень* $|\lambda|$ (ср. [11]). Таким образом задача интерполяции может быть ведена к подбору функций $\Phi_k(\lambda)$, удовлетворяющих сформулированным десь условиям.

В случае, когда $\xi(t)$ — невырожденный многомерный процесс с рацио-альным спектром, подбор функций $\Phi_k(\lambda)$ осуществляется крайне просто. удем искать все функции $\Phi_k(\lambda)$ в виде (4.7), где $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ — ра-иональные функции, степень числителя которых превосходит степень наменателя не более, чем на $m_k - 1$. При этом функции $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$, чевидно, не могут иметь общих полюсов. Поэтому для того, чтобы полю-а $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ не были одновременно и полюсами функций $\Psi_k(\lambda)$, уммы

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(i)}(\lambda) f_{jk}(\lambda), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4.8}$$

де i принимает значения 1 и 2, а $\omega_j^{(1)}(\lambda)$ и $\omega_j^{(2)}(\lambda)$ числители рациональ-ых функций $\Phi_j^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_j^{(2)}(\lambda)$, все должны обращаться в нуль во всех олюсах функций $\Phi_j^{(i)}(\lambda)$. Следовательно, $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ надо искать виде:

$$\Phi_k^{(1)}(\lambda) = \frac{\omega_k^{(1)}(\lambda)}{(\lambda-\theta_1)\ldots(\lambda-\theta_L)}, \qquad \Phi_k^{(2)}(\lambda) = \frac{\omega_k^{(2)}(\lambda)}{(\lambda-\overline{\theta}_1)\ldots(\lambda-\overline{\theta}_L)}. \tag{4.9}$$

де $\theta_1, \ldots, \theta_L$ — нули детерминанта $D(\lambda)$ в верхней полуплоскости, а $_1, \ldots, \overline{\theta}_L$ — соответствующие нули в нижней полуплоскости. При этом $nL + 2\sum_{k=1}^{n} m_k$ неизвестных коэффициентов многочленов $\omega_k^{(i)}(\lambda)$, $i = 1, 2$, $= 1, \ldots, n$, однозначно определятся из условий отсутствия полюсов у $_k(\lambda)$, в точках $\lambda = \alpha_{jk}^{(m)}$ или $\lambda = \overline{\alpha_{jk}^{(m)}}$ (это дает нам $2K = 2L + 2\sum_{k=1}^{n} m_k$ инейных уравнений) и из условий обращения в нуль сумм (4.8) при $= \theta_i$ или $\lambda = \overline{\theta}_i$ (еще $2(n-1)L$ линейных уравнений).

Выделим теперь из функций $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ многочленные компоненты

$$\Phi_k^{(1)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_k-1} W_{k,1}^{(j)}(i\lambda)^j + \varphi_k^{(1)}(\lambda), \quad \Phi_k^{(2)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_k-1} W_{k,2}^{(j)}(i\lambda)^j + \varphi_k^{(2)}(\lambda), \tag{4.10}$$

де $\varphi_k^{(1)}(\lambda)$ и $\varphi_k^{(2)}(\lambda)$ — функции из L_2. В силу расположения полюсов этих ункций в определенной полуплоскости преобразование Фурье $w_k^{(1)}(s)$ ункции $\varphi_k^{(1)}(s)$ будет обращаться в нуль на отрицательной полуоси, а реобразование Фурье $w_k^{(2)}(s)$ функции $\varphi_k^{(2)}(s)$ — на положительной полуоси. аким образом,

$$\Phi_k^{(1)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_k-1} W_{k,1}^{(j)}(i\lambda)^j + \int_0^\infty e^{-is\lambda} w_k^{(1)}(s)\, ds \tag{4.11}$$

$$\Phi_k^{(2)}(\lambda) = \sum_{l=0}^{m_k-1} W_{k,2}^{(j)}(i\lambda)^j + \int_0^\infty e^{is\lambda} w_k^{(2)}(s)\, ds$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\widetilde{\xi}_1^*(t,\tau)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=0}^{m_k-1}[W_{k,1}^{(j)}\xi_k^{(j)}(t)+W_{k,2}^{(j)}\xi_k^{(j)}(t+T)]+\right. \tag{4.12}$$

$$\left.+\int_0^\infty[w_k^{(1)}(s)\,\xi_k(t-s)+w_k^{(2)}(s)\,\xi_k(t+T+s)]\,ds.\right.$$

Итак, имеет место

Теорема 5. *Решение* $\widetilde{\xi}_1^*(t,\tau)$ *задачи интерполирования невырожденного многомерного стационарного процесса* $\xi(t)$ *с рациональным спектром задается формулой* (4.12). *При этом постоянные* $W_{k,1}^{(j)}$, $W_{k,2}^{(j)}$ *и функции* $w_k^{(1)}(s)$, $w_k^{(2)}(s)$ *в этой формуле находятся из соотношений* (4.11), *где* $\Phi_k^{(1)}(\lambda)$ *и* $\Phi_k^{(2)}(\lambda)$ *— функции* (4.9), θ_u *и* θ_v *— нули детерминанта* $D($ *спектральной матрицы процесса, а* $\omega_k^{(1)}(\lambda)$ *и* $\omega_k^{(2)}(\lambda)$ *— многочлены не выше чем* $(L+m_k-1)$*-й степени, однозначно определяемые условием отсутствия у функций* (4.5) *полюсов во всей комплексной плоскости.*

5. Дальнейшие обобщения

В предыдущих параграфах мы подробно разобрали задачи экстраполяции, интерполяции и фильтрации невырожденных многомерных стационарных процессов с рациональным спектром. В заключение мы перечислим некоторые дальнейшие линейные аппроксимационные задачи, также допускающие эффективное решение при помощи развитого здесь метода.

1. Отметим прежде всего, что все рассмотренные в настоящей статье задачи являются частными случаями следующей общей проблемы. Пусть на оси $-\infty<t<\infty$ выделено конечное число p непересекающих интервалов Δ_j, $j=1,\ldots,p$, один или два из которых могут быть и полубесконечными интервалами типа $(-\infty,t_0)$ или $[t_0,+\infty)$. Предполагается, что на Δ_j известны значения всех компонент процесса $\xi(t)$ на всех интервалах Δ_j, требуется по этим данным дать наилучшую линейную оценку некоторой случайной величины Ξ, корреляционно связной с процессом $\xi(t)$.

Будем считать, что процесс $\xi(t)$ имеет рациональный спектр (и невырожден) и что связь Ξ с $\xi(t)$ задается равенствами (3.1) — (3.4). Наилучшее линейное приближение $\widehat{\Xi}$ к величине Ξ мы будем опять искать в виде (3.5), где функции $\Phi_k(\lambda)$ удовлетворяют (3.6). Пусть $\Psi_k(\lambda)$ — это функция (3.8), а $\bar{\Delta}_l$, $l=1,\ldots,q$ (где q равно $p-1$, p или $p+1$) — интервалы, дополнительные к интервалам Δ_j (так что в сумме интервалы Δ_j, $j=1,\ldots,p$, и $\bar{\Delta}_l$, $l=1,\ldots,q$, покрывают всю прямую). Будем далее считать все интервалы Δ_j и $\bar{\Delta}_l$ замкнутыми, т. е. граничные точки будем относить сразу к двум интервалам. В таком случае нетрудно видеть, что величина (3.5) будет решением нашей задачи, если только функции $\Phi_k(\lambda)$, $k=1,\ldots,n$ и $\Psi_k(\lambda)$, $k=1,\ldots,n$ будут удовлетворять следующим условиям:

1) *Все функции* $\Phi_k(\lambda)$ *представимы в виде*

$$\Phi_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \Phi_k^{(j)}(\lambda), \tag{5.1}$$

где

$$\Phi_k^{(j)}(\lambda) = \sum_{l} \Phi_{k,l}^{(j)}(\lambda)\, e^{it_l^{(j)}\lambda}, \quad t_l^{(j)} \in \Delta_j \text{ при всех } l, \tag{5.2}$$

а $\Phi_{k,l}^{(j)}$ *— рациональные функции. При этом функции* $\Phi_k^{(j)}(\lambda)$, *отвечающие конечным интервалам* Δ_j, *все должны быть аналитическими во всей плоскости (целыми), функции* $\Phi_k^{(j)}(\lambda)$, *отвечающие бесконечному интервалу* Δ_j *типа* $(-\infty, t_0)$ *(если среди* Δ_j *такой интервал имеется), — аналитическими в нижней полуплоскости и функции* $\Phi_k^{(j)}(\lambda)$, *отвечающие интервалу* Δ_j *типа* $[t_0, \infty)$ *(если среди* Δ_j *такой имеется), — аналитическими в верхней полуплоскости.*

2) *Все функции* $\Psi_k(\lambda)$ *представимы в виде*

$$\Psi_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{q} \Psi_k^{(j)}(\lambda), \tag{5.3}$$

где

$$\Psi_k^{(j)}(\lambda) = \sum_{l} \Psi_{k,l}^{(j)}(\lambda)\, e^{is_l^{(j)}\lambda}, \quad s_l^{(j)} \in \overline{\Delta}_j \text{ при всех } l, \tag{5.4}$$

а $\Psi_{k,l}^{(j)}(\lambda)$ *— рациональные функции, убывающие при* $|\lambda| \to \infty$ *не медленнее, чем* $|\lambda|^{-2}$. *При этом также функции* $\Psi_k^{(j)}(\lambda)$, *отвечающие конечным интервалам* $\overline{\Delta}_j$, *должны быть целыми, функции* $\Psi_k^{(j)}(\lambda)$, *отвечающие интервалу* $\overline{\Delta}_j$ *типа* $(-\infty, t_0)$ *(если среди* $\overline{\Delta}_j$ *такой интервал имеется), — аналитическими в нижней полуплоскости и функции* $\Psi_k^{(j)}(\lambda)$, *отвечающие интервалу* $\overline{\Delta}_j$ *типа* (t_0, ∞) *(если среди* $\overline{\Delta}_j$ *такой имеется), — аналитическими в верхней полуплоскости.*

То, что эти два условия (вместе с условием (3.6)) действительно достаточны для того, чтобы величина $\widetilde{\Xi}$ и была искомым наилучшим приближением, доказывается точно так же, как это делалось в [11] для частных случаев этой задачи (относящихся к одномерным процессам $\xi(t)$). Подбор функций $\Phi_k(\lambda)$, удовлетворяющих требуемым условиям, в общем случае осуществляется вполне аналогично тому, как это делалось в частном случае задачи фильтрации (см. § 3); во всех случаях он в конце концов сводится к решению некоторой системы линейных уравнений. Явный вид функционала $\widetilde{\Xi}$ будет здесь включать сумму линейных комбинаций значений всех компонент процесса $\xi(t)$ и всех их существующих производных во всех концах интервалов Δ_j и в тех точках t_r (см. (3.4)), которые принадлежат какому-либо из Δ_j, а также сумму интегралов от всех компонент процесса $\xi(t)$ (с непрерывными весовыми функциями), распространенных по всем интервалам Δ_j, $j = 1, \ldots, p$.

II. В предыдущем изложении мы все время считали, что все компоненты процесса $\xi(t)$ имеют нулевое среднее значение. Это предположение не ограничивает общности по сравнению с предположением, что все средние значения $\mathbf{M}\xi_k(t)$ являются произвольными известными нам числами. Однако можно также предполагать, что средние значения компонент $\xi_k(t)$ нам неизвестны и искать, например, наилучшую *несмещенную* линейную оценку значения первой компоненты процесса в некоторый момент времени, в который не велось непосредственных наблюдений за процессом. В этом случае функции $\Phi_k(\lambda)$ должны будут удовлетворять дополнительным условиям: $\Phi_1(0) = 1$, $\Phi_k(0) = 0$ при $k = 2, \ldots, n$; одновременно несколько изменится также и основное условие ортогональности («условие б»; ср. стр. 268 или 275), в связи с чем функции $\Psi_k(\lambda)$ будут включать в себя еще один произвольный параметр (ср. [11], §§ 4—5). В случае невырожденных процессов с рациональным спектром и в этом случае решение задачи можно будет в конце концов свести к решению некоторой системы линейных уравнений с отличным от нуля детерминантом.

Наряду с задачей о наилучшем приближении неизвестного нам значения процесса $\xi_1(t)$ интерес представляет также задача о наилучшей линейной оценке самих неизвестных нам средних значений компонент процесса. Здесь также можно искать наилучшую оценку в виде функционала типа правой части (1.13); при этом нужные нам функции $\Phi_k(\lambda)$ можно подобрать, сформулировав вытекающие из существа задачи естественные ограничения на поведение этих функций при комплексных значениях λ.

III. Если предполагать, что процесс $\xi(t)$ — стационарный, то его среднее значение может быть только постоянным вектором. В некоторых случаях, однако, естественно предполагать, что все компоненты $\xi_k(t)$ представляют собой сумму зависящей от времени обыкновенной (не случайной) функции $x_k(t)$ и накладывающихся на эту функцию случайных стационарных колебаний (с нулевым средним значением). При этом, естественно, возникают задачи несмещенной экстраполяции или фильтрации такого процесса и оптимальной линейной оценки неизвестных средних значений $x_k(t)$ (относительно которых обычно заранее предполагают, что они имеют определенный функциональный вид). В наиболее обычной постановке задач такого типа все средние значения $x_k(t)$ предполагаются представимыми в виде линейных комбинаций (с неизвестными коэффициентами) конечного числа заданных функций $g_j(t)$, $j = 1, \ldots, s$; требуется дать наилучшую линейную оценку этих неизвестных коэффициентов и указать наилучший способ линейной экстраполяции или фильтрации исходных процессов $\xi_k(t)$ (ср. [14] – [16]). Если при этом процесс $\xi(t) - \boldsymbol{x}(t)$ имеет рациональный спектр, а все $g_j(t)$ являются или степенными функциями t^j или тригонометрическими функциями (иначе говоря, функциями вида $e^{i\lambda_j t}$) эффективное решение указанных задач может быть весьма просто получено с помощью небольшого видоизменения рассуждений §§ 2 –3. В этом случае все $\Phi_k(\lambda)$ будут иметь или фиксированные значения самой функции и нескольких ее производных при $\lambda = 0$ (если $g_j(t) = t^j$), или фиксированные значения в точках $\lambda = \lambda_j$ (если $g_j(t) = e^{i\lambda_j t}$); зато функции $\Psi_k(\lambda)$ будут содер-

кать s добавочных параметров. Поэтому число получаемых линейных равнений и здесь остается равным числу неизвестных.

Аналогичный метод применим также и в случае, когда коэффициенты многочленов или тригонометрических многочленов $x_k(t)$, являются лучайными величинами с заданными моментами первых двух порядов. В этом случае условия, накладываемые на функции $\Phi_k(\lambda)$ не зменяются, но к функциям $\Psi_k(\lambda)$ добавляются дополнительные слагаемые, авные значениям самих функций $\Phi_k(\lambda)$ или их производных в фиксированных точках с заранее известными коэффициентами.

IV. Отметим, наконец, что во всех рассмотрениях настоящей статьи опустимо также считать, что процесс $\xi(t)$ не является стационарным, а ишь имеет стационарные приращения некоторого порядка (ср. [12], где одробно разобраны решения соответствующих задач для одномерных роцессов $\xi(t)$ такого типа). Один специальный пример подобной задачи ильтрации (в которой речь идет об одномерных процессах со стационарыми приращениями первого порядка) с помощью совсем иного метода азобран также в работе [17]. В случае процессов со стационарными риращениями рациональные спектральные плотности могут иметь полюса точке $\lambda = 0$; однако это не вызывает существенных изменений в решениях всевозможных линейных аппроксимационных задач. Поэтому специально а перенесении результатов настоящей статьи на случай процессов со тационарными приращениями можно не останавливаться.

Поступила в редакцию
15.7.59

ЛИТЕРАТУРА

1] В. Н. Засухин, К теории многомерных стационарных случайных процессов, ДАН СССР, **33** (1941), 435—437.
2] M. Rosenblatt, A multi-dimensional prediction problem, Ark. f. Mat., **3** (1957), 407—424.
3] N. Wiener, P. Massani, The prediction theory of multivariate stochastic processes, I—II, Acta Math, **98**, 1—2 (1957), 111—150; **99**, 1, 2 (1958), 93—137.
4] P. Massani, Sur les processus vectoriels minimaux de rang maximal, C. R. Acad. Sci., **246**, 15 (1958), 2212—2217.
5] Ю. А. Розанов, Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, Успехи матем. наук, **13**, 2 (80) (1958), 93—142.
6] Ю. А. Розанов, Линейная экстраполяция многомерных стационарных процессов ранга 1 с дискретным временем, ДАН СССР, **125**, 2 (1959), 277—280.
7] Р. Ф. Матвеев, О регулярности многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, ДАН СССР, **126**, 4 (1959), 713—715.
8] Е. Г. Гладышев, О многомерных стационарных случайных процессах, Теория вероят. и ее примен., **III**, 4 (1958), 458—462.
9] J. L. Doob, Stochastic processes, N. Y., 1953 (Русск. перевод. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956).
0] N. Wiener, Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series N. Y., 1949.
1] А. М. Яглом, Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плоскостью, Труды Моск. Матем. Об-ва, **4** (1955), 333—374.

[12] А. М. Яглом, Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-ми приращениями, Матем. сб., **37** (79), 1 (1955), 141—196.
[13] S. Darlington, Linear least-squares smoothing and prediction, with applications, Bell System Techn. J., **37**, 5 (1958), 1221—1294.
[14] L. A. Zadeh, R. Ragazzini, Extension of Wiener's theory of prediction, J. Appl Phys., **21**, 7 (1950), 645—655.
[15] Дж. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М. 1958.
[16] U. Grenander, M. Rosenblatt, Statistical analysis of stationary time series N. Y., 1957.
[17] C. L. Dolph, M. A. Woodbury, On the relation between Green's functions and covariances of certain stochastic processes and its application to unbiased linear prediction, Trans. Amer. Math. Soc., **72**, 3 (1952), 519—550.

EFFECTIVE SOLUTIONS OF LINEAR APPROXIMATION PROBLEMS FOR MULTIVARIATE STATIONARY PROCESSES WITH A RATIONAL SPECTRUM

A. M. YAGLOM (*MOSCOW*)

(*Summary*)

We consider a class of multivariate stationary random processes $\xi(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)\}$ having the nonsingular spectral density matrix $\| f_{jk}(\lambda) \|$, where all $f_{jk}(\lambda)$ are rational functions of λ. The following linear approximation problems for the processes are studied: 1) the simplest extrapolation problem of determining a linear least-square estimate of $\xi_k(t+\tau)$, $\tau > 0$ by known values of $\xi_j(t')$, $j = 1, \ldots, n$, $t' \leqslant t$; 2) the finite interval extrapolation problem of a linear least-square estimation of $\xi_k(t+\tau)$ by $\xi_j(t')$, $j = 1, \ldots, n$, $t - T \leqslant t' \leqslant t$; 3) the interpolation problem of a least-square estimation of $\xi_k(t+\tau)$, $0 < \tau < T$ by $\xi_j(t')$, $j = 1, \ldots, n$, $t' \leqslant t$ or $t' \geqslant t + T$; 4) the filtration problem of a least-square estimation of the value of some random variable (such that functions $f_{\Xi k}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, from equations (3.1)—(3.2) have the form (3.4 where all $q_{rk}(\lambda)$ are rational) by the values of $\xi_j(t')$, $j = 1, \ldots, n$, $t' \leqslant t$ or $t - T \leqslant t' \leqslant t$.

In all cases the method used in previous papers [11] and [12] enables the explicit extrapolation, interpolarion or filtration formulae to be derived by merely solving the algebraical equation $D(\lambda) = \det \| f_{jk}(\lambda) \| = 0$ and afterwards a simple system of linear algebraical equations. The same method can also be applied to the case when we wish to find a least-squate estimate of $\xi_k(t+\tau)$ or Ξ by the values of $\xi_j(t')$, $j = 1, \ldots,$ on any set of closed intervals on the time axix. Some other generalizations of extrapolation, interpolation and filtration problems may be solved by the same method; they are given in the last section of the paper.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1960
Том V Выпуск 3

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СТАРШИХ МОМЕНТОВ. I

А. Н. ШИРЯЕВ

Введение

Настоящая работа посвящена изучению различных классов вещественных измеримых случайных процессов $\xi(t)$, зависящих от действительного параметра t, $-\infty < t < \infty$, с помощью рассмотрения их старших моментов и семиинвариантов.

Пусть $\mathbf{T}^{(k)}$ класс процессов $\xi(t)$, для которых

$$\mathbf{M}|\xi(t)|^k \leqslant C_k < \infty.$$

Если $\xi(t) \in \mathbf{T}^{(k)}$ и для всех $1 \leqslant l \leqslant k$, $-\infty < \tau < \infty$,

$$\mathbf{M}\,\xi(t_1)\ldots\xi(t_l) = \mathbf{M}\,\xi(t_1+\tau)\ldots\xi(t_l+\tau),$$

то скажем, что процесс $\xi(t)$ принадлежит классу $\mathbf{S}^{(k)}$ ($\xi(t) \in \mathbf{S}^{(k)}$).

Помимо классов $\mathbf{T}^{(k)}$ и $\mathbf{S}^{(k)}$ будут рассматриваться еще классы $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ и $\mathbf{\Lambda}^{(k)}$, к определению которых мы и приступим.

Рассмотрим в k-мерном эвклидовом пространстве R^k на системе борелевских множеств $\mathfrak{B}^k$ совокупность $\mathfrak{G}_k$ действительных обобщенных вполне конечных мер g_k, [1]:

$$\|g_k\| = \sup_{\bigcup B_i = R^k} \sum_i |g_k(B_i)| < \infty,$$

где $B_i \in \mathfrak{B}^k$ и попарно не пересекаются.

Если $\xi(t) \in \mathbf{T}^{(k)}$, то обозначив

$$m_\xi^{(k)}(t, \ldots, t_k) = \mathbf{M}\,\xi(t_1)\ldots\xi(t_k),$$

определим на $\mathfrak{G}_k$ линейный функционал

$$(m_\xi^{(k)}, g_k) = \int_{R^k} m_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)\, g_k(dt).$$

Пусть $\mathfrak{Z}_k$ — пространство функций $z_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, являющихся преобразованием Фурье мер $g_k \in \mathfrak{G}_k$:

$$z_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \widetilde{g}_k = \int_{R^k} e^{i(\lambda,t)} g_k(dt), \quad (\lambda, t) = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_k t_k.$$

На $\mathfrak{Z}_k$ определим функционал $\mathbf{M}_\xi^{(k)}$ формулой

$$(\mathbf{M}_\xi^{(k)},\ z_k) = (m_\xi^{(k)},\ g_k), \tag{0.1}$$

где $z_k = \tilde{g}_k$.

Определенный таким образом функционал $\mathbf{M}_\xi^{(k)}$ называют преобразованием Фурье функционала $m_\xi^{(k)}$.

В дальнейшем мы ограничимся тем случаем, когда $\mathbf{M}_\xi^{(k)}$ является функционалом типа вполне конечной меры:

$$(\mathbf{M}_\xi^{(k)},\ z_k) = \int\limits_{R^k} z_k(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k)\,\mathbf{M}_\xi^k(d\lambda), \tag{0.2}$$

где $\mathbf{M}_\xi^{(k)}(\Lambda)$ — комплексная вполне конечная мера, определенная на $\mathfrak{B}^k$. Из этого соотношения, в частности, вытекает, что

$$m_\xi^{(k)}(t_1,\ \ldots,\ t_k) = \int\limits_{R^k} e^{i(t,\lambda)}\mathbf{M}_\xi^{(k)}(d\lambda). \tag{0.3}$$

Отметим также, что поскольку $m_\xi^{(k)}(t_1,\ \ldots,\ t_k)$ является симметричной функцией своих аргументов, мера $\mathbf{M}_\xi^{(k)}(\Lambda)$ симметрична*.

Если для всех $1 \leqslant l \leqslant k$ имеет место (0.2), то говорят, что процесс $\xi(t)$ принадлежит классу $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ (см. [2] стр. 366), ($\xi(t) \in \mathbf{\Phi}^{(k)}$).

Ясно, что между классами $\mathbf{T}^{(k)}$, $\mathbf{S}^{(k)}$ и $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ существуют следующие соотношения

$$\mathbf{S}^{(k)} \subset \mathbf{T}^{(k)},\quad \mathbf{\Phi}^{(k)} \subset \mathbf{T}^{(k)}.$$

Хорошо известно, что $\mathbf{S}^{(2)} \subset \mathbf{\Phi}^{(2)}$, причем, пример процесса $\eta(t) = \xi(t)\cos\omega t$, где $\xi(t) \in \mathbf{S}^{(2)}$ показывает, что класс $\mathbf{\Phi}^{(2)}$ шире класса $\mathbf{S}^{(2)}$. Однако для $k > 2$ А. Н. Колмогоровым построен пример [3], показывающий, что существуют процессы класса $\mathbf{S}^{(k)}$, не принадлежащие в тоже время классу $\mathbf{\Phi}^{(k)}$. Тем не менее искусственность построенного А. Н. Колмогоровым примера дает основание надеяться, что класс $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ является довольно широким.

Заметим, что при изучении процессов класса $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ оказывается более удобным рассматривать не меры $\mathbf{M}_\xi^{(k)}(\Lambda)$, которые будем называть спектральными моментами (с. м.), а спектральные семиинварианты (с. с.) $\mathbf{F}_\xi^{(k)}(\Lambda)$, определение которых дано в § 1, где приведены также формулы связи с. м. и с. с.

---

* Мы говорим, что вполне конечная мера $\mathbf{P}^{(k)}(\Lambda)$ симметрична, если для любой ограниченной бэровской функции $G_k(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k)$

$$\int\limits_{R^k} G_k(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k)\,\mathbf{P}^{(k)}(d\lambda) = \int\limits_{R^k} G_k(\lambda_{i_1},\ \ldots,\ \lambda_{i_k})\,\mathbf{P}^{(k)}(d\lambda),$$

где $(i_1,\ \ldots,\ i_k)$ любая перестановка чисел $(1,\ 2,\ \ldots,\ k)$.

В § 2 рассмотрено как преобразуются спектральные моменты и семи-
нварианты при линейных и нелинейных преобразованиях.

Класс $\mathbf{\Delta}^{(k)}$, введенный А. Н. Колмогоровым, определяется как подкласс
ласса $\mathbf{\Phi}^{(k)} \cap \mathbf{S}^{(k)}$, который характеризуется тем, что меры $\mathbf{F}_\xi^{(l)}(\Lambda)$ $1 \leqslant l \leqslant k$,
бсолютно непрерывны относительно меры Лебега на плоскостях $\lambda_1 + \ldots +$
$+ \lambda_l = 0$, $(\xi(t) \in \mathbf{\Delta}^{(k)})$.

Такая структура комплексных мер, будучи неестественной для $\mathbf{M}_\xi^{(l)}(\Lambda)$
$\xi(t) \in \mathbf{\Phi}^{(k)} \cap \mathbf{S}^{(k)}$), оказывается естественной для $\mathbf{F}_\xi^{(l)}(\Lambda)$ и действительно
меет место в ряде примеров (§ 3)*.

Параграф 3 посвящен изучению процессов класса $\mathbf{\Delta}^{(\infty)}$. Показано, в
астности, что класс $\mathbf{\Delta}^{(\infty)}$ инвариантен относительно широкого класса
елинейных преобразований.

Работа выполнена под руководством А. Н. Колмогорова, которому ав-
ор выражает свою благодарность за общую постановку задач и постоян-
ое внимание к его работе.

§ 1. Определения и примеры

1. Как известно (см., напр., [2]), каждому процессу $\xi(t) \in \mathbf{\Phi}^{(2)}$ можно
оставить в соответствие аддитивную случайную функцию множеств $X(\Lambda)$,
пределенную на кольце $\mathfrak{R}^1$ множеств Λ прямой R^1, состоящем из всевоз-
ожных конечных соединений интервалов, замкнутых слева и открытых
права, такую, что с вероятностью единица

$$\xi(t) = \int_{R^1} e^{it\lambda} X(d\lambda). \tag{1.1}$$

нтеграл в правой части понимается как предел в среднем квадратическом
нтегральных сумм, состоящих из конечного числа членов.

$$\Sigma e^{it\lambda_k} X(\Delta_{\lambda_k}), \Delta_{\lambda_k} = [\lambda_k, \lambda_k + \Delta\lambda_k),$$

огда $\max\limits_{\lambda_k} |\Delta\lambda_k| \to 0$ и $\bigcup\limits_{\lambda_k} \Delta_{\lambda_k} \to R^1$; $\Delta_{\lambda_i} \cap \Delta_{\lambda_j} = \varnothing$, $i \neq j$.

Если условие (0.3) выполнено для некоторого $k = 2n$, $n \geqslant 1$, то ана-
огично случаю $k=2$ доказывается возможность представления (1.1), понимая
ходимость интеграла в (1.1) в смысле S_{2n}**.

Нетрудно показывается, что для процессов класса $\mathbf{\Phi}^{(k)}$, $k \geqslant 2$,

$$\mathbf{M} X(\Lambda_1) \ldots X(\Lambda_k) = \mathbf{M}_\xi^{(k)}(\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_k). \tag{1.2}$$

В дальнейшем нам придется рассматривать стохастические интегралы
ида

$$I_n = \int_{R^n} \psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) X(d\lambda_1) \ldots X(d\lambda_k), \tag{1.3}$$

---

* См. также [4].

** Мы говорим, что последовательность случайных величин η_k сходится к η_{k_0} в смысле
m, если

$$\lim_{k \to k_0} \mathbf{M} |\eta_k - \eta_{k_0}|^m = 0.$$

где $\psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — бэровские функции от n переменных и $X(\Lambda)$ — слу чайные функции множеств, определенные для $\Lambda \in \mathfrak{R}^1$. Укажем класс функ ций $\psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, для которых интеграл (1.3) может быть определен как предел в среднем квадратическом некоторой последовательности случайных величин.

Если ψ_n — ступенчатая функция, т. е.

$$\psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi(\Lambda_1^{(i)}) \ldots \chi(\Lambda_n^{(i)}),$$

где $\chi(\Lambda)$ — характеристическая функции (х.ф-ция) множества $\Lambda \in \mathfrak{R}^1$, то под (1.3) понимаем любую случайную величину, равную с вероятностью единица сумме

$$\sum_{i=1}^{k} c_i X(\Lambda_1^{(i)}) \ldots X(\Lambda_n^{(i)}).$$

Пусть $R^{2n} = R^n \quad R^n$. В пространстве R^n рассмотрим вспомогательную меру

$$\sigma_\xi^{(n)}(\Lambda) = \sup_{\bigcup \Delta_i = R^n} \sum_i |\mathbf{M}_\xi^{(2n)}(\Lambda \times \Lambda_i)|, \tag{1.4}$$

где $\Lambda \in \mathfrak{B}^n$, $\Lambda_i, \Lambda_i \in \mathfrak{B}^n$. И пусть бэровские функции $\psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ принадлежат $L^2_{\sigma_\xi^{(n)}}$, т. е.

$$\int_{R^n} |\psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|^2 \sigma_\xi^{(n)}(d\lambda) < \infty. \tag{1.5}$$

Для этих функций можно найти последовательность ступенчатых функций $\psi_n^{(i)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, таких, что

$$\lim_{i \to \infty} \int_{R^n} |\psi_n^{(i)} - \psi_n|^2 \sigma_\xi^{(n)}(d\lambda) = 0. \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что существует предел в среднем квадратическом последовательности

$$I_n^{(i)} = \int_{R^n} \psi_n^{(i)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) X(d\lambda_1) \ldots X(d\lambda_n),$$

так как в силу условия (1.6) существует и не зависит от выбора последовательностей i и j предел $\lim_{i,j \to \infty} \mathbf{M} I_n^{(i)} I_n^{(j)}$.

Ясно также, что для различных последовательностей $\psi_n^{(i)}$ и $\widetilde{\psi}_n^{(i)}$, удовлетворяющих (1.6), пределы $I_n^{(i)}$ и $\widetilde{I}_n^{(i)}$ совпадают с вероятностью единица. Любую случайную величину, равную с вероятностью единица пределу в среднем квадратическом последовательности $I_n^{(i)}$, мы и принимаем по определению за интеграл I_n.

В частности, если процесс $\xi(t) \in \Phi^{(2)}$, то положив $\psi_1(\lambda) = \chi_\Lambda(\lambda)$, где $\chi_\Lambda(\lambda)$ - х.ф-ция B-множества Λ, мы получим, что определена случайная величина

$$\int \chi_\lambda(\lambda) X(d\lambda), \tag{1.}$$

которую естественно считать продолжением функции множеств $X(\Lambda)$ ($\Lambda \in \mathfrak{R}^1$) на борелевские множества прямой R^1. Будем случайную величину (1.7) также обозначать через $X(\Lambda)$.

Заметим, что $X(\Lambda)$ квадратически-счетно аддитивна, т. е. если $\Lambda = \bigcup_i \Lambda_i$, где Λ_i не пересекающиеся B-множества, то

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\left| X(\Lambda) - \sum_{i=1}^{N} X(\Lambda_i)\right|^2 = 0.$$

Любую случайную функцию B-множеств пространства R^n, удовлетворяющую этому условию, называют случайной мерой.

Замечание. Если случайная функция $X(\Lambda)$ имеет ортогональные значения, т. е. $\mathbf{M}\, X(\Lambda_1) X(\Lambda_2) = 0$ для $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$, то определение интеграла

$$I_1 = \int \psi_1(\lambda) X\, d\lambda)$$

совпадает с обычным определением стохастического интеграла (см., напр., [5], стр. 383).

2. Пусть $\xi(t) \in \mathbf{T}^{(1)}$. Следуя [6], назовем характеристическим функционалом процесса $\xi(t)$

$$\chi_\xi(g) = \mathbf{M} \exp\left(i \int \xi(t)\, g(dt)\right), \tag{1.8}$$

где $g \in \mathfrak{G}_1$.

Если $\xi(t) \in \mathbf{\Phi}^{(2)}$, то в силу (1.1) с вероятностью единица

$$\int \xi(t)\, g(dt) = \int z(\lambda) X(d\lambda), \quad z = \widetilde{g}.$$

Поэтому естественно назвать

$$\widetilde{\chi}_\xi(z) = \mathbf{M} \exp\left(i \int z(\lambda) X(d\lambda)\right) \tag{1.9}$$

спектральным х.ф. процесса $\xi(t)$. Ясно, что

$$\chi_\xi(g) = \widetilde{\chi}_\xi(z),\ z = \widetilde{g}. \tag{1.10}$$

Приведем без доказательства следующие две простые леммы:

Лемма 1. *Если* $\xi(t) \in \mathbf{T}^{(k+1)}$, *то для всех* $g \in \mathfrak{G}_1$

$$\chi_\xi(g) = 1 + \sum_{l=1}^{k} \frac{i^l}{l!} \int_{R^l} m_\xi^{(l)}(t_1, \ldots, t_l)\, g(dt_1) \ldots g(dt_l) + O(\|g\|^{k+1}).$$

Если $\xi(t) \in \mathbf{\Phi}^{(k+1)}$, *то для всех* $z \in \mathfrak{Z}_1$

$$\widetilde{\chi}_\xi(z) = 1 + \sum_{l=1}^{k} \frac{i^l}{l!} \int_{R^l} z(\lambda_1) \ldots z(\lambda_l)\, \mathbf{M}_\xi^{(l)}(d\lambda) + O(\|z\|^{k+1}),$$

где $\|z\| = \sup_\lambda |z(\lambda)|$.

Лемма 2. *Если* $\xi(t) \in \mathbf{T}^{(k+1)}$, *то существует такое* $c > 0$, *что для всех* $g \in \mathfrak{G}_1$ c $\|g\| \leqslant c$ *справедливо единственное разложение*

$$\ln \chi_\xi(g) = \sum_{l=1}^{k} \frac{i^l}{l!} \int_{R^l} s_\xi^{(l)}(t_1, \ldots, t_l)\, g(dt_1) \ldots g(dt_l) + O(\|g\|^{k+1})$$

с симметричными функциями $s_\xi^{(l)}(t_1, \ldots, t_l)$. *Функции* $s_\xi^{(l)}(t_1, \ldots, t_l)$ *совпадают с простыми семиинвариантами, введенными в* [7].

Если $\xi(t) \in \mathbf{\Phi}^{(k-1)}$, *то существует такое* $c > 0$, *что для всех* $z \in \mathfrak{Z}_1$ *с* $\|z\| \leqslant c$ *имеет место единственное разложение*

$$\ln \widetilde{\chi}_\xi(z) = \sum_{l=1}^{k} \frac{i^l}{l!} \int_{R^l} z(\lambda_1) \ldots z(\lambda_l)\, \mathbf{F}_\xi^{(l)}(d\lambda) + O(\|z\|^{k+1})$$

с симметричными вполне конечными мерами $\mathbf{F}_\xi^{(l)}(\Lambda)$, *которые называют спектральными семиинвариантами. Семиинварианты* $s_\xi^{(l)}$ *и* $\mathbf{F}_\xi^{(l)}$ *связаны преобразованием Фурье:*

$$s_\xi^{(l)}(t_1, \ldots, t_l) = \int_{R^l} e^{i(t,\lambda)}\, \mathbf{F}_\xi^{(l)}(d\lambda).$$

Установим связь спектральных моментов и семиинвариантов.

Пусть $R^k = R^{k_1} \times \ldots \times R^{k_n}$. Обозначим через $L_{(k)}$ набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ координатных осей пространства R^k. Очевидно, что каждому подпространству R^{k_l} пространства R^k можно поставить в соответствие неупорядоченный набор $L_{k_l} \subset L_{(k)}$ его координатных осей. Обратно, если $L_{(k)} = \bigcup_l^m L_{k_l}$, где L_{k_l} попарно непересекающиеся неупорядоченные поднаборы набора $L_{(k)}$, то пространство R^k можно рассматривать как декартово произведение пространств $R^{k_1}, \ldots, R^{k_m}$, имеющих своими координатными осями соответственно наборы $L_{k_1}, \ldots, L_{k_m}$.

Пусть $R^k = R^{k_1} \times \ldots \times R^{k_m}$ и $\Lambda = \Lambda_{k_1} \times \ldots \times \Lambda_{k_m}$, где B-множества $\Lambda_{k_l} \subset R^{k_l}$. Тогда на множествах Λ можно ввести меру

$$\mathbf{M}_\xi^{(k_1)} \times \ldots \times \mathbf{M}_\xi^{(k_m)}(\Lambda) = \mathbf{M}_\xi^{(k_1)}(\Lambda_{k_1}) \ldots \mathbf{M}_\xi^{(k_m)}(\Lambda_{k_m}),$$

продолжение которой на B-множества Λ пространства R^k мы будем обозначать следующим образом

$$\mathbf{M}_\xi^{(L_{k_1})} \times \ldots \times \mathbf{M}_\xi^{(L_{k_m})}(\Lambda).$$

Подобно тому, как это делалось в [7], нетрудно установить следующие формулы связи с. м. и с. с.:

$$\mathbf{F}_\xi^{(k)}(\Lambda) = \sum_{\substack{\bigcup_{l=1}^{m} L_{k_l} = L_{(k)} \\ 1 \leqslant m \leqslant k}} (-1)^m (m-1)!\, \mathbf{M}_\xi^{(L_{k_1})} \times \ldots \times \mathbf{M}_\xi^{(L_{k_m})}(\Lambda), \quad (1.11)$$

$$\mathbf{M}_\xi^{(k)}(\Lambda) = \sum_{\substack{\bigcup_{l=1}^{m} L_{k_l} = L_{(k)} \\ 1 \leqslant m \leqslant k}} \mathbf{F}_\xi^{(L_{k_1})} \times \ldots \times \mathbf{F}_\xi^{(L_{k_m})}(\Lambda), \quad (1.12)$$

где под Σ понимается суммирование по всем разбиениям множества $L_{(k)}$ на *неупорядоченные* непересекающиеся наборы L_{k_l}, $\bigcup_{l=1}^{m} L_{k_l} = L_{(k)}$, $1 \leqslant m \leqslant k$.

Приведем примеры х. ф. $\chi_\xi(g)$ и семиинвариантов некоторых процессов. имеры спектральных х. ф. $\tilde{\chi}_\xi(z)$ и с. с. будут рассмотрены в § 3.

Пример 1. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский процесс, тогда согласно [6]

$$\ln \chi_\xi(g) = i \int_{R^1} s_\xi^{(1)}(t)\, g(dt) - \frac{1}{2} \int_{R^2} s_\xi^{(2)}(t_1, t_2)\, g(dt_1)\, g(dt_2).$$

Пример 2. Пусть $N(T)$ действительная случайная мера на числовой мой такая, что

$$\ln \mathbf{M} e^{i\alpha N(T)} = \sigma(T)\, \psi(\alpha), \tag{1.13}$$

$\sigma(T)$ — некоторая локально конечная мера и $\psi(\alpha)$ — логарифм характе- тической функции безгранично-делимого закона с конечной дисперсией [8]:

$$\psi(\alpha) = i\gamma\alpha + \int \{e^{i\alpha u} - 1 - i\alpha u\} \frac{d\,K(u)}{u^2}. \tag{1.14}$$

ссмотрим процесс

$$\xi(t) = \int R(t, \tau)\, N(d\tau), \tag{1.15}$$

бэровская функция $R(t, \tau)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\left.\begin{aligned} &|R(t, \tau)| \leqslant C_1 < \infty \quad \text{равномерно по } t \text{ и } \tau \\ &\int |R(t, \tau)|\, \sigma(d\tau) \leqslant C_2 < \infty \text{ равномерно по } t. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

кажем, что тогда

$$\ln \chi_\xi(g) = \int \psi(R{*}g(\tau))\, \sigma(d\tau), \tag{1.17}$$

$$R{*}g(\tau) = \int R(t, \tau)\, g(dt).$$

сть $h(t)$ — функция, принимающая лишь конечное число значений. Как: азано в [9], тогда

$$\ln \mathbf{M} \exp\left\{ i \int h(t)\, N(dt) \right\} = \int \psi(h(t))\, \sigma(dt).$$

ли $\gamma(\tau)$ — ограниченная функция, принадлежащая $L_{3,}^{\Gamma}$ то найдется последательность ступенчатых функций $h_n(\tau)$, равномерно ограниченных по τ , таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \int \left| h_n(\tau) - \gamma(\tau) \right| \sigma(d\tau) = 0.$$

Но если $\psi(\alpha)$ удовлетворяет (1.14), то для $|\alpha_1| \leqslant C_3 < \infty$, $|\alpha_2| \leqslant C_3 < \infty$

$$|\psi(\alpha_1) - \psi(\alpha_2)| \leqslant C_4 |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

этому

$$\lim_{n\to\infty} \int \psi(h_n(\tau))\, \sigma(d\tau) = \int \psi(\gamma(\tau))\, \sigma(d\tau).$$

так как

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \exp\left\{ i \int h_n(\tau)\, N(d\tau) \right\} = \mathbf{M} \exp\left\{ i \int \gamma(\tau)\, N(d\tau) \right\},$$

$$\ln \mathbf{M} \exp\left\{ i \int \gamma(\tau) N(d\tau) \right\} = \int \psi(\gamma(\tau)) \sigma(d\tau). \qquad (1.1$$

Положив теперь в (1.18)

$$\gamma(\tau) = R * g(\tau), \qquad (1.1$$

получим формулу (1.17).

Из этой формулы получаем семиинварианты процесса (1.15)

$$\left(\int |x|^{k-2} \mathbf{K}(dx) < \infty \right)$$

$$s_\xi^{(1)}(t) = \gamma \int R(t, \tau) \sigma(d\tau), \qquad (1.2$$

$$s_\xi^{(l)}(t_1, \ldots, t_l) = \int x^{l-2} \mathbf{K}(dx) \int R(t_1, \tau) \ldots R(t_k, \tau) \sigma(d\tau), \; 2 \leqslant l \leqslant k.$$

Если случайная функция $N(T)$ пуассоновская с

$$\psi(\alpha) = e^{i\alpha} - 1, \qquad (1.2$$

то процесс (1.15), называемый в этом случае процессом дробового эффек имеет

$$\ln \chi_\xi(g) = \int \left\{ \exp(iR * g(\tau)) - 1 \right\} \sigma(d\tau) \qquad [(1.2$$

и

$$s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) = \int R(t_1 \tau) \ldots R(t_k, \tau) \sigma(d\tau). \qquad (1.$$

Пример 3. Рассмотрим теперь так называемый процесс обобщенн дробового эффекта. Такой процесс определяется следующим образом. Пу

$$\widetilde{\xi}(t) = \int R_\theta(t) N(d\theta), \qquad (1.$$

где случайные функции $R_\theta(t)$ при разных θ как процессы независимы меж собой и независимы от пуассоновской меры $N(T)$, удовлетворяющей (1. и (1.21), причем мера $\sigma(T)$ предполагается неатомистической и локал конечной. Пусть также

$$\mathbf{M} |R_\theta(t)| \leqslant C_1 < \infty \text{ равномерно по } \theta \text{ и } t, \qquad (1.$$

$$\int \mathbf{M} |R_\theta(t)| \sigma(d\theta) \leqslant C_2 < \infty \text{ равномерно по } t,$$

и при любом θ

$$\lim_{t \to t'} \mathbf{M} |R_\theta(t) - R_\theta(t')| = 0.$$

Из последнего условия вытекает, что у процесса $\widetilde{\xi}(t)$ существует ему вивалентный измеримый $\xi(t)$, [10], который мы и будем рассматривать.

Для этого процесса $\xi(t)$ нетрудно получить х.ф. $\chi_\xi(g)$. Пусть

$\mathfrak{R}_\theta(g) = \mathbf{M} e^{i\gamma(\theta)}$, где

$$\gamma(\theta) = \int R_\theta(t) g(dt).$$

Рассмотрим новый процесс

$$\xi_{\alpha, \beta}(t) = \int_\alpha^\beta R_\theta(t) N(d\theta)$$

(α и β некоторые числа).

Если на полуинтервале $\Delta = [\alpha, \beta)$ $N(\Delta) = k$, k — целое (для простоты

ят — произошло k событий), то обозначив через $\theta_1, \ldots, \theta_k$ моменты явления этих событий на Δ, получим

$$\chi_{\xi_{\alpha,\beta}}(g) = \mathbf{M}\exp\left\{i\int_{\alpha}^{\beta}\xi_{\alpha,\beta}(t)\,g\,(dt)\right\} = \mathbf{M}\exp\left\{i\int_{\alpha}^{\beta}\gamma(\theta)\,N\,(d\theta)\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\sigma(\Delta)}(\sigma(\Delta))^k}{k!}\left[\frac{1}{\sigma(\Delta)}\int_{\alpha}^{\beta}\Re_\theta(g)\,\sigma(d\theta)\right]^k = \exp\left\{\int_{\alpha}^{\beta}(\Re_\theta(g)-1)\,\sigma(d\theta)\right\}.$$

есь мы воспользовались тем фактом, что (см. [5], стр. 359)

$$\mathbf{P}\{\theta_1 \subset \Delta_1, \ldots, \theta_k \subset \Delta_k \mid N(\Delta) = k\} = \prod_{i=1}^{k}\frac{\sigma(\Delta_i)}{\sigma(\Delta)},$$

где $\Delta_i \subset \Delta$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$, $\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i = \Delta$.

Следовательно,

$$\ln\chi_{\xi_{\alpha,\beta}}(g) = \int_{\alpha}^{\beta}(\Re_\theta(g)-1)\,\sigma(d\theta).$$

так как мера $N(T)$ неотрицательна, то в силу (1.25) получим

$$\lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\to-\infty}}\chi_{\xi_{\alpha,\beta}}(g) = \chi_\xi(g).$$

го же время

$$\lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\to-\infty}}\ln\chi_{\xi_{\alpha,\beta}}(g) = \int_R(\Re_\theta(g)-1)\,\sigma(d\theta).$$

этому

$$\ln\chi_\xi(g) = \int_R(\Re_\theta(g)-1)\,\sigma(d\theta). \qquad (1.26)$$

этой формулы получаем временные семиинварианты $s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)$:

$$s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) = \int\mathbf{M}[R_\theta(t_1)\ldots R_\theta(t_k)]\,\sigma(d\theta) \qquad (1.27)$$

и условии существования интегралов в правых частях).

§ 2. Линейные и нелинейные преобразования процессов

1. Если процесс $\xi(t) \in \mathbf{T}^{(1)}$, то его линейные преобразования задают формулой $\eta(t) = \int R(t,\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau$, где при любом t $\int|R(t,\tau)|\,d\tau \leqslant C < \infty$. Ясно что х. ф. $\chi_\eta(g)$ вычисляется по х. ф. $\chi_\xi(g)$ следующим образом [6]: $\chi_\eta(g) = \chi_\xi(R{*}g)$.

Для процессов $\xi(t)$ класса $\Phi^{(2)}$ линейные преобразования задаются формулой

$$\eta(t) = \int e^{it\lambda}\,G(\lambda)\,X(d\lambda), \qquad (2.1)$$

е $X(\Lambda)$ — спектральная мера процесса $\xi(t)$ (см. (1.16)) и функции $G(\lambda)$ ковы, что интеграл в правой части существует в среднем квадратическом.

В силу (2.1) получаем ($z = \widetilde{g}$)

$$\widetilde{\chi}_{\eta}(z) = \widetilde{\chi}_{\xi}(z \cdot G).$$

Отсюда следует, что при линейных преобразованиях (2.1) с.м. и с.с. пре разуются следующим образом

$$\mathbf{M}_{\eta}^{(k)}(\Lambda) = \int_{\Lambda} G(\lambda_1) \ldots G(\lambda_k)\, \mathbf{M}_{\xi}^{(k)}(d\lambda), \qquad (2$$

$$\mathbf{F}_{\eta}^{(k)}(\Lambda) = \int_{\Lambda} G(\lambda_1) \ldots G(\lambda_k)\, \mathbf{F}_{\xi}^{(k)}(d\lambda) \qquad (2$$

(при условии существования интегралов в правых частях (2.2) и (2.3 Формула (2.2) позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $G(\lambda) = 0$ *для* $|\lambda \pm \lambda_0| > \Delta$ *и* $|G(\lambda)| < C$ *для* $|\lambda \pm \lambda_0| \leqslant \Delta$. *И пусть* $\xi(t) \in \mathbf{\Phi}^{(N)} \cap \mathbf{S}^{(N)}$, *где* $N = \left[\frac{\lambda_0}{\Delta}\right]$*. Тогда все нечетные м менты процесса* $\eta(t)$, *определенного* (2.1), *до порядка* N *тождествен равны нулю*.

Доказательство. В силу (2.2)

$$m_{\eta}^{(2p+1)}(t_1, \ldots, t_{2p+1}) = \int e^{i(t,\lambda)}\, G(\lambda_1) \ldots G(\lambda_{2p+1})\, \mathbf{M}_{\xi}^{(2p+1)}(d\lambda). \qquad (2$$

Как показано в [2], стр. 424, для того чтобы процесс $\xi(t) \in \mathbf{\Phi}^{(k)}$ был то же время процессом класса $\mathbf{S}^{(k)}$, необходимо и достаточно, чтобы д всех $1 \leqslant l \leqslant k$

$$\mathbf{M}_{\xi}^{(l)}(\Lambda) = \int_{\Lambda} \chi(\lambda_1, \ldots \lambda_l)\, \mathbf{M}_{\xi}^{(l)}(d\lambda), \qquad (2$$

где $\chi(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ — характеристическая функция множества $\{\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = 0\}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, при условиях

$$\lambda_0 - \Delta \leqslant |\lambda_i| \leqslant \lambda_0 + \Delta,\ i = 1, \ldots, 2p, \qquad (2$$
$$(2p+1)\Delta < \lambda_0$$

соотношение

$$\lambda_0 - \Delta \leqslant |\lambda_1 + \ldots + \lambda_{2p}| \leqslant \lambda_0 + \Delta \qquad (2$$

невозможно.

Пусть для некоторых k и l $(k + l = 2p)$

$$\lambda_0 - \Delta \leqslant \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k} \leqslant \lambda_0 + \Delta,$$
$$-\lambda_0 - \Delta \leqslant \lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_l} \leqslant -\lambda_0 + \Delta.$$

Отсюда следует, что

$$(k-l)\lambda_0 - 2p\Delta \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_{2p} \leqslant (k-l)\lambda_0 + 2p\Delta$$

---

* $[x]$ — целая часть числа x.

** Без точной формулировки этот результат встречается в технической литературе (с например, [11]).

или

$$2(p-l)\lambda_0 - 2p\Delta \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_{2p} \leqslant 2(p-l)\lambda_0 + 2p\Delta. \qquad (2.8)$$

Но соотношение (2.8) при условии (2.6) несовместимо с соотношением

$$\lambda_0 - \Delta \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_{2p} \leqslant \lambda_0 + \Delta.$$

В самом деле, предположим, что $p - l \geqslant 1$. Тогда указанная несовместимость следует из того, что при условии (2.6) имеет место

$$2(p-l)\lambda_0 - 2p\Delta \geqslant \lambda_0 + \Delta.$$

Если же теперь $p - l < 1$, то указанная несовместимость следует из того, что тогда и подавно выполнено неравенство

$$\lambda_0 - \Delta \geqslant 2(p-l)\lambda_0 + 2p\Delta.$$

Совершенно аналогично разбирается случай несовместимости при условии (2.6) неравенств (2.8) и

$$-\lambda_0 - \Delta \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_{2p} \leqslant -\lambda_0 + \Delta.$$

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что условие $|G(\lambda)| < C$ для $|\lambda \pm \lambda_0| < \Delta$ можно заменить условиями, обеспечивающими существование интегралов в (2.5).

2. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых нелинейных преобразований процессов класса $\mathbf{\Phi}^{(2N)}$.

Мы будем рассматривать нелинейные преобразования $\eta_t = \mathcal{N}\xi$, задаваемые формулой

$$\eta(t) = \mathcal{N}\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} \int_{R^k} e^{it(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)} p_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) X(d\lambda_1) \ldots X(d\lambda_k), \qquad (2.9)$$

где функции $p_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ таковы, что для всех $1 \leqslant k \leqslant N$

$$\int_{R^k} |p_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)|^2 \sigma_\xi^{(k)}(d\lambda) < \infty. \qquad (2.10)$$

В частности, всякое преобразование

$$\eta(t) = \mathcal{N}_1\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{u_1, \ldots u_k = 0}^{u_1, \ldots, u_k} \int_{R^k} \xi^{(u_1)}(t-\tau_1) \ldots \xi^{(u_k)}(t-\tau_k) R^{(u_1, \ldots, u_k)}(d\tau), \qquad (2.11)$$

где $\xi^{(u)}(t)$ есть u-производная в среднем квадратическом процесса $\xi(t)$, $\xi^{(0)}(t) = \xi(t)$, $R^{(u_1, \ldots, u_k)}$-действительные вполне конечные меры на $\mathfrak{B}^k$ и для всех $1 \leqslant k \leqslant N$, $0 \leqslant u_i \leqslant U_i$

$$\int \lambda_1^{2u_1} \ldots \lambda_k^{2u_k} \sigma_\xi^{(k)}(d\lambda) < \infty, \qquad (2.12)$$

является преобразованием типа (2.9).

В самом деле, пусть

$$r^{(u_1, \ldots, u_k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \int_{R^k} e^{-i(\lambda, \tau)} R^{(u_1, \ldots, u_k)}(d\tau).$$

Тогда

$$\int_{R^k} \xi^{(u_1)}(t-\tau_1)\dots\xi^{(u_k)}(t-\tau_k)\,R^{(u_1,\dots,u_k)}(d\tau) =$$

$$= \int_{R^k} r^{(u_1,\dots,u_k)}(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\,e^{it(\lambda_1+\dots+\lambda_k)}(i\lambda_1)^{u_1}\dots(i\lambda_k)^{u_k}X(d\lambda_1)\dots X(d\lambda_k).$$

Обозначив теперь

$$p_k(\lambda_1,\dots,\lambda_k) = \sum_{u_1,\dots,u_k=0}^{u_1,\dots,u_k} r^{(u_1,\dots,u_k)}(\lambda_1,\dots,\lambda_k)(i\lambda_1)^{u_1}\dots(i\lambda_k)^{u_k},$$

мы и получим формулу типа (2.9). Причем (2.10) будет выполнено в силу условия (2.12).

Нижеследующая теорема указывает правило вычисления с. с. $\mathbf{F}_\tau^{(k)}$ процесса (2.9) по с. с. процесса $\xi(t)$.

Введем некоторые обозначения.

Пусть $\chi_k^{(\Delta)}(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ — характеристическая функция множества $\{\lambda_1+\dots+\lambda_k\subset\Delta\}$ пространства R^k, где Δ — B-множество на прямой R^1. Если положить (ср. [2], стр. 423)

$$Y(\Delta) = \sum_{k=1}^{N}\int_{R^k}\chi_k^{(\Delta)}(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\,p_k(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\,X(d\lambda_1)\dots X(d\lambda_k), \quad (2.13)$$

то с вероятностью единица

$$\eta(t) = \int e^{it\lambda}\,Y(d\lambda). \quad (2.14)$$

Из (2.13) видно, что если $\xi(t)\in\mathbf{\Phi}^{(kN)}$, то $\eta(t)\in\mathbf{\Phi}^{(k)}$, $k\geqslant 2$.

Пусть $L_k=\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$ — множество, состоящее из k точек. На этом множестве определим целочисленную функцию $\varkappa_k(\lambda)$ такую, что $1\leqslant\varkappa_k(\lambda)\leqslant N$. Положим

$$|\varkappa_k| = \varkappa_k(\lambda_1)+\dots+\varkappa_k(\lambda_k),$$

$$\widetilde{\chi}_k^{(\Delta)}(\nu_1,\dots,\nu_k) = \chi_k^{(\Delta)}(\nu_1,\dots,\nu_k)\,p_k(\nu_1,\dots,\nu_k).$$

Если $\Delta=\Delta_1\times\dots\times\Delta_k$, $\Delta_i\in\mathfrak{B}^1$, $(\varkappa_k(\lambda_0)=0)$, то обозначим

$$\widetilde{\chi}_{\varkappa_k}^{(\Delta)}(\nu_1,\dots,\nu_{|\varkappa_k|}) = \prod_{i=1}^{k}\chi_{\varkappa_k(\lambda_i)}^{(\Delta_i)}(\nu_{\varkappa_k(\lambda_{i-1})},\dots,\nu_{\varkappa_k(\lambda_i)}) \quad (2.15)$$

и

$$\mathfrak{M}_{\varkappa_k(\lambda_m)} = \{\nu_{\varkappa_k(\lambda_1)+\dots\varkappa_k(\lambda_{m-1})+1},\dots,\nu_{\varkappa_k(\lambda_1)+\dots+\varkappa_k(\lambda_m)}\}. \quad (2.16)$$

Если для всех $1\leqslant k\leqslant N$

$$\int_{R^k}|p_k(\lambda_1,\dots,\lambda_k)|^2\,\sigma_\xi^{(k)}(d\lambda)<\infty, \quad (2.17)$$

то в силу (2.13) и (2.14) для множества $\Delta=\Delta_1\times\dots\times\Delta_k$ имеем

$$\mathbf{M}_\eta^{(k)}(\Delta) = \sum_{\varkappa_k(\lambda)}\int_{R^{|\varkappa_k|}}\widetilde{\chi}_{\varkappa_k}^{(\Delta)}(\nu_1,\dots,\nu_{|\varkappa_k|})\,\mathbf{M}_\xi^{(|\varkappa_k|)}(d\nu). \quad (2.18)$$

пользовавшись формулой (1.12) в новых обозначениях, получим

$$^{)}(\Lambda)=\sum_{\varkappa_k^{(\lambda)}}\int_{R^{|\varkappa_k|}}\widetilde{\chi}_{\varkappa_k}^{(\Lambda)}(\nu_1,\ldots,\nu_{|\varkappa_k|})\sum_{\substack{\bigcup_{i=1}^{m}\mathfrak{N}_i=\mathfrak{N}_{(|\varkappa_k|)}\\ 1\leqslant m\leqslant|\varkappa_k|}}\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_1)}\times\ldots\times\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_m)}(d\nu). \qquad (2.19)$$

сь, очевидно,

$$\mathfrak{N}_{(|\varkappa_k|)}=\mathfrak{M}_{(|\varkappa_k|)}=\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{M}_{\varkappa_k(\lambda_i)}.$$

Будем говорить, что произведение $\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_1)}\times\ldots\times\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_m)}$ неразложимо относительно $\mathfrak{M}_{(|\varkappa_k|)}$, если не существует таких целых $s\,(0<s<k)$ и $t\,(0<t<m)$, что

$$\bigcup_{\alpha=1}^{t}\mathfrak{N}_{i_\alpha}=\bigcup_{\beta=1}^{s}\mathfrak{M}_{\varkappa_k(\lambda_{j_\beta})},$$

$1\leqslant i_\alpha\leqslant m,\ 1\leqslant j_\beta\leqslant k.$

Теорема 2. *Пусть* $\eta=\mathcal{N}\xi$, *где оператор* $\mathcal{N}$ *задается формулой* (2,9), *и ть выполнено* (2.17). *Тогда спектральный семиинвариант* $\mathbf{F}_\eta^{(k)}$ *процесса* $\mathcal{N}\xi$ *выражается через спектральные семиинварианты* $\mathbf{F}_\xi^{(m)}$ *процесса* $\in\Phi^{(kN)}$ *по следующей формуле*

$$^{)}(\Lambda)=\sum_{\varkappa_k^{|\lambda|}}\int_{R^{|\varkappa_k|}}\widetilde{\chi}_{\varkappa_k}^{(\Lambda)}(\nu_1,\ldots,\nu_{|\varkappa_k|})\sum_{\substack{\bigcup_{i=1}^{m}\mathfrak{N}_i=\mathfrak{N}(|\varkappa_k|)\\ 1\leqslant m\leqslant|\varkappa_k|}}{}^{*}\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_1)}\times\ldots\times\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_m)}(d\nu) \qquad (2.20)$$

означает сумму только по произведениям $\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_1)}\times\ldots\times\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_m)}$ *неразложи- м относительно* $\mathfrak{M}\,(|\varkappa_k|)$.

Иначе говоря, нахождение с. с. $\mathbf{F}_\eta^{(k)}$ заключается в следующем: надо азить с. м. $\mathbf{M}_\eta^{(k)}$ по формуле (2.19) через с. с. процесса $\xi(t)$ и затем инуть все члены $\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_1)}\times\ldots\times\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_m)}$, разложимые относительно $\mathfrak{M}_{(|\varkappa_k|)}$. Заим также, что подлежащие выкидыванию члены в (2.19) можно характзовать также тем, что они дают разделение $|\varkappa_k|$-кратных интегралов, дящих в (2.19) по крайней мере на два интеграла меньшей кратности *, авшиеся члены, т. е. члены правой части формулы (2.20) таким свойом не обладают.

Для доказательства этой теоремы достаточно убедиться в том, что образование Фурье каждого члена формулы (2.20) является неразложи- м произведением, как это определено в [7], а члена формулы (2.19), не едшего в формулу (2.20),—представляет собой разложимое произведение. очем, можно доказать эту теорему и непосредственно тем же самым одом, который применен при доказательстве теоремы в [7].

---

*) Если считать, что семиинварианты $\mathbf{F}_\xi^{(\mathfrak{N}_i)}$ сами не распадаются на произведение неьких множителей.

Приведем простой пример на применение этой теоремы.

Пусть $\eta(t)=\xi^2(t)$, где $\xi(t)\in\Phi^{(4)}$ и $\mathbf{M}\xi(t)=0$. Найдем $\mathbf{F}_{\eta}^{(2)}(\Lambda)$. Буд следовать правилу, описанному в теореме 2.

Сначала рассматриваем

$$\mathbf{M}_{\eta}^{(2)}(\Lambda_1\times\Lambda_2)=\int\limits_{R^4}\chi_2^{(\Lambda_1)}(\nu_1,\ \nu_2)\,\chi_2^{(\Lambda_2)}(\nu_3,\ \nu_4)\,\mathbf{M}_{\xi}^{(4)}(d\nu).$$

В силу формулы (1.12)

$$\mathbf{M}_{\xi}^{(4)}(d\nu)=\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_1,\nu_2)}\times\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_3,\nu_4)}(d\nu)+\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_1,\nu_3)}\times\mathbf{F}^{(\nu_2,\nu_4)}(d\nu)+$$
$$+\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_1,\nu_4)}\times\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_2,\nu_3)}(d\nu)+\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)}(d\nu).$$

Ясно, что член $\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_1,\nu_2)}\times\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_3,\nu_4)}$ разложим относительно $\mathfrak{M}_1=\{\nu_1,\nu_2\}\cup\{\nu_3,\nu$ а остальные — нет. Поэтому

$$\mathbf{F}_{\eta}^{(2)}(\Lambda_1\times\Lambda_2)=\int\limits_{R^4}\chi_2^{(\Lambda_1)}(\nu_1,\ \nu_2)\,\chi_2^{(\Lambda_2)}(\nu_3,\ \nu_4)\{\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_1,\nu_3)}\times\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_2,\nu_4)}(d\nu)+$$
$$+\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_1,\nu_4)}\times\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_2,\nu_3)}(d\nu)+\mathbf{F}_{\xi}^{(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)}(d\nu)\}. \qquad (2.2$$

Если предположить, что у спектральных семиинвариантов $\mathbf{F}_{\xi}^{(2)}$ и $\mathbf{F}$ есть плотности

$$\mathbf{F}_{\xi}^{(2)}(\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}f_{\xi}^{(2)}(\nu_1,\ \nu_2)\,d\nu_1\,d\nu_2,$$

$$\mathbf{F}_{\xi}^{(4)}(\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}f_{\xi}^{(4)}(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \nu_4)\,d\nu_1\,d\nu_2\,d\nu_3\,d\nu_4,$$

то формулу (2.21) можно переписать тогда следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\eta}^{(2)}(\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}f_{\eta}^{(2)}(\lambda_1,\ \lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2,$$

где

$$f_{\eta}^{(2)}(\lambda_1,\ \lambda_2)=\int\limits_{R^2}\{f_{\xi}^{(2)}(\nu_1,\ \nu_2)\,f_{\xi}^{(2)}(\lambda_1-\nu_1,\ \lambda_2-\nu_2)+f_{\xi}^{(2)}(\nu_1,\ \lambda_2-\nu_2)\times$$
$$\times f_{\xi}^{(2)}(\lambda_1-\nu_1,\ \nu_2)+f_{\xi}^{(4)}(\nu_1,\ \lambda_1-\nu_2,\ \nu_2,\ \lambda_1-\nu_2)\}\,d\nu_1 d\nu_2.$$

Замечание. Можно дать несколько простых достаточных услови при которых теорема 2 остается справедливой и в том случае, ког процесс $\eta=\mathcal{N}\xi$ представим в виде ряда по степеням процесса $\xi(t)$:

$$\eta(t)=\mathcal{N}\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n(t). \qquad (2.$$

Ряд в правой части предполагается сходящимся в среднем квадратическо

Нетрудно видеть, что условие $(1\leqslant l\leqslant k,\ \|\mathbf{M}_{\xi}^{(m)}\|=C_n<\infty)$

$$\sum_{i_1,\ldots,i_l}|a_{i_1}\ldots a_{i_l}|C_{i_1+\ldots+i_l}<\infty \qquad (2.$$

достаточно для применения теоремы 2 к вычислению с. с. $\mathbf{F}_{\eta}^{(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant k$, по с. с. процесса $\xi(t)$. Условие (2.23) значительно упрощается, если константы $C_n = C^n$, где C — некоторая постоянная. В этом случае условие будет выполнено при любом $l \geqslant 1$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| C^n < \infty. \tag{2.24}$$

Нетрудно также показать, что (2.23) выполнено при любом $l \geqslant 1$, если константы C_n таковы, что функция $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} z^n$ целая, а коэффициенты

$$|a_n| \leqslant \frac{D^n}{n!}, \tag{2.25}$$

где D — некоторая постоянная.

Если процесс $\xi(t)$ гауссовский, то $F(z)$, очевидно, целая. Условие же (2.25) можно несколько ослабить.

В самом деле, пусть $\mathbf{M}\xi(t) = 0$ и $C_2 = \|\mathbf{M}_{\xi}^{(2)}\| = \gamma^2 < \infty$. Тогда в силу формулы (1.12)

$$\|\mathbf{M}_{\xi}^{(2k)}\| \leqslant \frac{\gamma^{2k}(2k)!}{2^k k!}, \quad \|\mathbf{M}_{\xi}^{(2k+1)}\| = 0.$$

Покажем, что (2.23) выполнено при любом $l \leqslant k$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma k}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{|a_n| n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!} < \infty. \tag{2.26}$$

В силу условия $\mathbf{M}\xi(t) = 0$ в сумме

$$\sum_{i_1, \ldots, i_l} |a_{i_1} \ldots a_{i_l}| C_{i_1 + \ldots i_l}$$

суммирование достаточно распространить только на четные $i_1 + \ldots + i_l$. Но для четных $i_1 + \cdots + i_l$

$$C_{i_1+\ldots+i_l} \leqslant \frac{\gamma^{i_1+\ldots+i_l} \, (i_1+\ldots+i_l)!}{2^{\frac{i_1+\ldots+i_l}{2}} \left(\frac{i_1+\ldots+i_l}{2}\right)!}.$$

так как

$$(i_1 + \ldots + i_l)! \leqslant l^{i_1+\ldots+i_l} i_1! \ldots i_l! \text{ и } \left(\frac{i_1+\ldots+i_l}{2}\right)! \geqslant \left[\frac{i_1}{2}\right]! \ldots \left[\frac{i_l}{2}\right]!,$$

то

$$C_{i_1+\ldots+i_l} \leqslant \left(\frac{\gamma l}{\sqrt{2}}\right)^{i_1+\ldots+i_l} \frac{i_1!\ldots i_l!}{\left[\frac{i_1}{2}\right]!\ldots\left[\frac{i_l}{2}\right]!}.$$

Откуда и вытекает (2.23).

§ 3. Процессы класса $\Delta^{(k)}$

1. Как мы уже отмечали (см. теорему 1), условие (2.5) является необходимым и достаточным, для того, чтобы процесс класса $\Phi^{(k)}$ принадлежал в то же время классу $S^{(k)}$. Соотношение (2.5) можно записать также следующим образом $(1 \leqslant l \leqslant k)$

$$\mathbf{M}_\xi^{(l)}(\Lambda) = \int\limits_{\Lambda \cap L_l^l(0)} \mathbf{M}_\xi^{(l)}(d\lambda), \tag{3.1}$$

где $L_n^l(\nu)$, $n \geqslant l$, обозначает плоскость $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = \nu$ в пространстве R^n.

Из формул (1.11) и (2.5) вытекает, что это условие эквивалентно условию

$$\mathbf{F}_\xi^{(l)}(\Lambda) = \int\limits_{\Lambda \cap L_l^l(0)} \mathbf{F}_\xi^{(l)}(d\lambda) \tag{3.2}$$

для всех $1 \leqslant l \leqslant k$.

Следовательно, если $\xi(t) \in \Phi^{(k)} \cap S^{(k)}$, то $(1 \leqslant l \leqslant k,\ z_l = \widetilde{g}_l)$

$$(\mathbf{F}_\xi^{(l)}, z_l) = \int\limits_{R^l} z_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)\, \mathbf{F}_\xi^{(l)}(d\lambda) = \int\limits_{L_l^l(0)} z_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)\, \mathbf{F}_\xi^{(l)}(d\lambda). \tag{3.3}$$

Предположим, что функционал

$$(\mathbf{F}_\xi^{(l)}, z_l) = \int\limits_{R^{l-1}} z_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, -\lambda_1-\cdots-\lambda_{l-1}) \times$$

$$\times f_\xi^{(l)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, -\lambda_1-\cdots-\lambda_{l-1})\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{l-1}, \tag{3.4}$$

где функции $f_\xi^{(l)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ таковы, что

$$\int\limits_{R^{l-1}} |f_\xi^{(l)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, -\lambda_1-\cdots-\lambda_{l-1})|\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{l-1} < \infty. \tag{3.5}$$

Пользуясь обозначениями теории обобщенных функций, соотношение (3.4) можно записать также следующим образом

$$(\mathbf{F}_\xi^{(l)}, z_l) = (\delta(\lambda_1+\cdots+\lambda_l) f_\xi^{(l)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_l), z_l), \tag{3.6}$$

или

$$\mathbf{F}_\xi^{(l)}(\Lambda) = \int\limits_\Lambda \delta(\lambda_1+\cdots+\lambda_l) f_\xi^{(l)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_l. \tag{3.7}$$

Если для всех $1 \leqslant l \leqslant k$ имеет место (3.4), или (3.6), то говорят, что процесс $\xi(t)$ принадлежит классу $\Delta^{(k)}$.

Соотношение (3.7) означает, что на множествах Λ, не пересекающихся плоскостью $L_l^l(0)$, $\mathbf{F}_\xi^l(\lambda) = 0$; в плоскости же $L_l^l(0)$ спектральная мера $\mathbf{F}_\xi^{(l)}(\Lambda)$ абсолютно непрерывна относительно l—1-мерной лебеговской меры.

Приведем примеры процессов класса $\mathbf{\Delta}^{(k)}$.

Пример 1. Пусть $\xi(t)$ гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью $f_\xi(\lambda)$. Тогда

$$\ln \widetilde{\chi}_\xi(z) = i\int_{R^1} z(\lambda)\,\mathbf{F}_\xi^{(1)}(d\lambda) - \frac{1}{2}\int_{R^2} z(\lambda_1)\,z(\lambda_2)\,\mathbf{F}_\xi^{(2)}(d\lambda) =$$

$$= i\mathbf{M}\xi(0)\,z(0) - \frac{1}{2}\int_{R^1} |z(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda)\,d\lambda$$

и, следовательно,

$$\mathbf{F}_\xi^{(1)}(\Lambda) = \int_\Lambda \delta(\lambda)\,\mathbf{M}\xi(0)\,d\lambda,$$

$$\mathbf{F}_\xi^{(2)}(\Lambda) = \int_\Lambda \delta(\lambda_1+\lambda_2)\,f_\xi(\lambda_1)\,d\lambda_1\,d\lambda_2 \qquad (3.8)$$

$$\mathbf{F}_\xi^{(l)}(\Lambda) = 0, \quad k > 2,$$

т. е. гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью есть процесс класса $\Delta^{(\infty)}$.

Пример 2. Пусть $\xi(t) = \int R(t-\theta)\,N(d\theta)$, где случайная мера $N(T)$ определена в примере 2 § 1, но такая, что $\sigma(T) = aT$. Пусть также $(G = \widetilde{R})$

$$|R(t)| \leqslant C_1 < \infty, \quad \int |R(t)|\,dt \leqslant C_2 < \infty \text{ и } |G(\lambda)| \leqslant C_3 \frac{1}{|\lambda|}.$$

Тогда поскольку

$$\int R(t-\theta)\,g(d\theta) = \int e^{it\lambda} G(\lambda)\,z(\lambda)\,d\lambda,$$

то в силу (1.17), получим

$$\ln \widetilde{\chi}_\xi(z) = a\int \psi\left(\int e^{it\lambda} G(\lambda)\,z(\lambda)\,d\lambda\right) dt.$$

Откуда $\left(\int |x|^{k-2}\,\mathbf{K}(dx) < \infty\right)$

$$\mathbf{F}_\xi^{(1)}(\Lambda) = a\gamma\int_\Lambda \delta(\lambda)\,G(\lambda)\,d\lambda,$$

$$\mathbf{F}_\xi^{(2)}(\Lambda) = a\int \delta(\lambda_1+\lambda_2)\,G(\lambda_1)\,G(\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2 \int \mathbf{K}(dx),$$

$$\mathbf{F}_\xi^{(l)}(\Lambda) = a\int \delta(\lambda_1+\ldots+\lambda_l)\,G(\lambda_1)\ldots G(\lambda_l)\,d\lambda_1\ldots d\lambda_l \int x^l\,\mathbf{K}(dx), \quad 3 \leqslant l \leqslant k \qquad (3.9)$$

Пример 3. Найдем спектральные семиинварианты процесса обобщенного дробового эффекта (1.24) с $R_\theta(t) = R(t-\theta)$.

Предположим, что $\mathbf{M}|R(t)| \leqslant C_1 < \infty$ равномерно по t и

$$\int \mathbf{M}|R(t)|\,dt < \infty. \tag{3.10}$$

В силу условия (3.10) с вероятностью единица существует

$$G(\lambda) = \int e^{it\lambda} R(t)\,dt.$$

Тогда из (1.26) получим

$$\mathbf{F}_{\xi}^{(k)}(\Lambda) = a \int_{\Lambda} \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\, \mathbf{M} G(\lambda_1) \ldots G(\lambda_k)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_k$$

(в предположении существования интегралов в правых частях).

Теорема 3. *Если процесс* $\xi(t) \in \mathbf{\Delta}^{(n\Lambda)}$, *то процесс* $\eta = \mathcal{N}^{\xi}$, *задаваемый формулой* (2.9) *с* $|p_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)| \leqslant C_m < \infty$, $m = 1, \ldots N$, *принадлежит классу* $\Delta^{(n)}$.

Доказательство. Пусть для всех $1 \leqslant m \leqslant nN$

$$\mathbf{F}_{\xi}^{(m)}(\Lambda) = \int_{\Lambda} \delta(\Lambda_1 + \ldots + \Lambda_m)\, f_{\xi}^{(m)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_m,$$

где $f_{\xi}^{(m)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ удовлетворяют условию (3.5). Воспользуемся теоремой 2. Рассмотрим какой-нибудь член суммы (2.20). Пусть им будет член ($\Lambda = \Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_n$)

$$\hat{\mathbf{F}}_{\eta}^{(n)}(\Lambda) = \int \prod_{i=1}^{n} \chi_{k_i}^{(\Lambda_i)}(\nu_1^{(i)}, \ldots, \nu_{k_i}^{(i)})\, p_{k_i}(\nu_1^{(i)}, \ldots, \nu_{k_i}^{(i)})\, \mathbf{F}_{\xi}^{(\mathfrak{N}_1)} \times \ldots \times \mathbf{F}_{\xi}^{(\mathfrak{N}_p)}(d\nu) =$$

$$= \int_{\substack{\nu_1^{(1)} + \ldots + \nu_{k_1}^{(1)} \subset \Lambda_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{k_n}^{(n)} \subset \Lambda_n}} \prod_{i=1}^{n} p_{k_i}(\nu_1^{(i)}, \ldots, \nu_{k_i}^{(i)}) \prod_{j=1}^{p} \delta(\nu_{j1} + \ldots + \nu_{jl_j})\, f_{\xi}^{(l_j)}(\nu_{j_1}, \ldots, \nu_{jl_j})\, d\nu \tag{3.11}$$

(здесь каждое из ν_{kl} равно некоторому $\nu_{s_t}^{(r)}$ и $d\nu = d\nu_1^{(1)} \ldots d\nu_{k_n}^{(n)}$).

Сделаем в (3.11) замену переменных ($i = 1, \ldots, n$)

$$\begin{aligned} &\nu_1^{(i)} + \ldots + \nu_{k_i}^{(i)} = \lambda_i \\ &\nu_1^{(i)} = \mu_1^{(i)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\nu_{k_i-1}^{(i)} = \mu_{k_i-1}^{(i)} \end{aligned}$$

и «проинтегрируем» * последовательно $(p-1)$ раз по переменным, отличным

* Под этими словами мы понимаем следующее: функционал

$$(\delta(x - x_0),\ f(x)) = \int \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0).$$

$\lambda_1, \ldots \lambda_n$, которые найдутся, так как подынтегральное выражение в 1) неразложимо относительно $\mathfrak{M}_{(k_1+\ldots+k_n)}$. В результате получим

$$\hat{\mathbf{F}}_{\eta}^{(n)}(\Lambda) = \int_{\Lambda} \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, \hat{f}_{\eta}^{(n)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n, \tag{3.12}$$

обозначено

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_{R^{l_1+\ldots+l_p-(p-1)}} \prod_{i=1}^{n} p_{k_i}(x_1^{(i)}, \ldots, x_{k_i}^{(i)}) \prod_{j=1}^{p} f_{\xi}^{(l_j)}(x_{j1}, \ldots, x_{jl_j})\, d\mu, \tag{3.13}$$

$$x_{ij} = \sum \alpha_{rst}^{(ij)} \mu_{s_t}^{(r)} + \sum \gamma_k^{(ij)} \lambda_k, \tag{3.14}$$

$$x_i^{(j)} = \sum \beta_{rst}^{(ij)} \mu_{s_t}^{(r)} + \sum \delta_k^{(ij)} \lambda_k,$$

$$d\mu = d\mu_1^{(1)} \ldots d\mu_{k_{n-1}}^{(n)}$$

ждое из $\alpha_{rst}^{(ij)}$, $\beta_{rst}^{(ij)}$, $\gamma_k^{(ij)}$, $\delta_k^{(ij)}$ принимает одно из трех значений: $-1, 0, 1$). Для завершения доказательства осталось показать суммируемость функ- $\hat{f}_{\eta}^{(n)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ по сечению $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$. Так как по условию еремы $|p_{k_i}| \leqslant C_{k_i} < \infty$, то в силу теоремы Фубини ([1], стр. 144) доста- но показать, что

$$I = \int_{R^{l_1+\ldots+l_p-p}} \prod_{i=1}^{p} |f_{\xi}^{(l_i)}(x_{i1}, \ldots, x_{il_i})|\, d\mu d\lambda < \infty,$$

вместо λ_n поставлено $-\lambda_1 - \ldots - \lambda_{n-1}$ и $d\lambda = d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}$. Заметим, прежде всего, что при любом j

$$x_{j1} + \ldots + x_{jl_j} = 0. \tag{3.15}$$

смотрим теперь функцию

$$f_{\xi}^{(l_1)}(x_{11}, \ldots, x_{1l_1}).$$

ожим

$$y_{11}^{(1)} = x_{11} = \sum \alpha_{rst}^{(11)} \mu_{s_t}^{(r)} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(11)} \lambda_k + \gamma_n^{(11)}(-\lambda_1 - \ldots - \lambda_{n-1}). \tag{3.16}$$

ем затем действительно входящие члены как в сумму (3.16) (кроме ого-нибудь одного), так и суммы (3.14) с $i > 1$, $j > 1$ в качестве новых еменных $y_{ij}^{(1)}$. Такое преобразование невырожденное: его якобиан равен или $+1$.

Тогда получим

$$I = \pm \int_{R^{l_1+\ldots+l_p-p}} \prod_{j=1}^{p} |f_{\xi}^{(l_j)}(y_{j1}^{(1)}, \ldots, y_{jl_j}^{(1)})|\, dy, \quad dy = \prod dy_{ij}^{(1)}.$$

Рассматриваем теперь $y_{12}^{(1)}$ и проделываем аналогичную замену перемен ных, полагая $y_{11}^{(2)} = y_{11}^{(1)}$. В силу (3.15) после $(l_1 - 1)$ таких преобразовани координат окажется

$$y_{11}^{(l_1-1)} + \ldots + y_{1l_1}^{(l_1-1)} = 0,$$

причем $y_{11}^{(l_1-1)}, \ldots, y_{1l_1}^{(l_1-1)}$ будут входить *только* в $f_\xi^{(l_1)}$.

Берем теперь функцию $f_\xi^{(l_2)}$ и проделываем аналогичные замены пере менных. То же проделываем и с остальными функциями. В результате по лучим (в новых обозначениях)

$$I = \prod_{i=1}^{p} \int_{R^{l_i-1}} | f_\xi^{(l_i)}(x_1, \ldots, x_{l_i-1}, -x_1 - \ldots - x_{l_i-1}) | \, dx_1 \ldots, dx_{l_i-1},$$

что в силу (3.5) конечно. Тем самым теорема доказана.

Проиллюстрируем теорему 3 следующим примером.

Пример 4. Пусть $\eta_t(t) = \xi^2(t)$, где $\xi(t)$ гауссовский процесс с $\mathbf{M}\xi(t) =$ и спектральной плотностью $f_\xi(\lambda)$. Тогда нетрудно убедиться (ср. ф-лу (17 в [7]), что

$$f_{\eta_t}^{(n)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 2^{n-1}\,(n-1)! \overline{\int f_\xi(\lambda_{i_1} + \nu) f_\xi(\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \nu) \ldots f_\xi(\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_n} + \nu) d\nu},$$

где черта означает усреднение по всем перестановкам $(i_1, \ldots, i_n)$ чисе $(1, \ldots, n)$.

2. Пусть $\xi(t) \in \mathbf{\Delta}^{(\infty)}$. Рассмотрим на пространстве траекторий $x(t)$ этог процесса функционалы $f(x(t))$, являющиеся замыканием в среднем квадра тическом полиномов

$$\eta_n = f_n(x(t)) = \sum_{n_1, \ldots, n_k} C_{n_1} \ldots C_{n_k} x^{n_1}(t_1) \ldots x^{n_k}(t_k). \tag{3.1}$$

Теорема 4. *Процессы* $\eta_t(t) = f(\xi(t-\tau))$ *принадлежат классу* $\mathbf{\Delta}^2$.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что процессы $f_n(\xi(t-\tau$ принадлежат классу $\mathbf{\Delta}^{(\infty)}$. Нетрудно убедиться, что из условия

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} | f(\xi(t)) - f_n(\xi(t)) |^2 = 0$$

вытекает сходимость по вариации с. с. $\mathbf{F}_{\eta_n}^{(2)}(\Lambda)$ к с. с. $\mathbf{F}_{\eta}^{(2)}(\Lambda)$ при $n \to \infty$

$$\sup_{\Lambda} | \mathbf{F}_{\eta_n}^{(2)}(\Lambda) - \mathbf{F}_{\eta}^{(2)}(\Lambda) | \to 0, \; n \to \infty. \tag{3.1}$$

Но так как $\mathbf{F}_{\eta_n}^{(2)}(\Lambda) = \int_\Lambda f_{\eta_n}^{(2)}(\lambda)\, d\lambda$, если $\Lambda \subseteq L_2^2(0)$, и $\mathbf{F}_{\eta_n}^{(2)}(\Lambda) = 0$, есл $\Lambda \cap L_2^2(0) = \varnothing$, то из (3.18) следует, что последовательность f_{η_n} фундаме

льна в L^1. Очевидно, что для $\Lambda \cap L_2^2(0) = \varnothing$, $\mathbf{F}_\eta^{(2)}(\Lambda) = 0$. А в силу полноты пространства L^1 для $\Lambda \subseteq L_2^2(0)$

$$\mathbf{F}_\eta^{(2)}(\Lambda) = \int_\Lambda f_\eta^{(2)}(\lambda)\, d\lambda,$$

о и доказывает теорему.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24.11.59

ЛИТЕРАТУРА

] П. Халмош, Теория меры, М., ИЛ, 1953.
] A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Theorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
] А. Н. Колмогоров, О классах $\Phi^{(n)}$ Форте и Блан-Лапьерра, Теория вероят. и ее примен., V, 3 (1960), 373.
] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы, Автоматика и телемеханика, XIV, № 2 (1953).
] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М, ИЛ, 1956.
] A. N. Kolmogoroff, La transformation de Laplace dans les espaces lineaires, C. R., 200 (1935), 1717.
] В. П. Леонов, А. Н. Ширяев, К технике вычисления семиинвариантов, Теория вероятн. и ее примен., IV, 2 (1959), 342—355.
] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.
] S. Bochner, Hormonic analysis and the theory of probability, Berkeley and Los Angeles, 1955.
]W. Ambrose, On mesurable stochastic processes, TAMS, 47 (1940), 66—79.
] J. Mullen, D. Middleton, The rectification of non-Caussian noise, Quart. Appl. Math., 15 (1958), 395—419.

SOME PROBLEMS IN THE SPECTRAL THEORY OF HIGHER-ORDER MOMENTS. I

A. N. SHIRYAEV (MOSCOW)

(Summary)

This paper investigates different classes of stochastic processes (classes $\mathbf{T}^{(k)}$, $\mathbf{S}^{(k)}$, $\mathbf{\Phi}^{(k)}$, ', which are defined in the introduction) by examining their high-order spectral moments l semi-invariants.

The paper considers linear (see theorem 1 for example) and non-linear transformations stochastic processes. A formula for determining spectral semi-invariants of the process) on the basis of the spectral semi-invariants of the process $\xi(t)$ is given for a large up of non-linear transformations $\eta = N\xi$ of class $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ processes (theorem 2).

It is shown that class $\mathbf{\Delta}^{(\infty)}$ is invariant with respect to a large group of non-linear nsformations (theorem 3).

Theorem 4 shows that process $\eta(t) = f(\xi(t-\tau))$ belongs to class $\mathbf{\Delta}^{(2)}$, where $) \in \mathbf{\Delta}^{(\infty)}$ and the functional $f(x(t))$ in the space of trajectories $x(t)$ of process $\xi(t)$ ongs to a mean-square closure of the family of polynomials (3.17).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск
1960

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ АБСОЛЮТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАМЕНЫ МЕРЫ

И. В. ГИРСАНОВ

1. Введение. Целью настоящей работы является изучение одного класса стохастических процессов в n-мерном евклидовом пространстве R_n. Пусть $X = \{x(t, \omega), \mathbf{P}\}$ — стохастический процесс в R_n, где $t \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$, $x(t, \omega) = \{x^1(t, \omega), \ldots, x^n(t, \omega)\}$, а $\mathbf{P} = \mathbf{P}(d\omega)$ — вероятностная мера, определенная на некоторой σ-алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств Ω. При этом предполагается, что при любом $t \in [0,1]$ и любом борелевском $\Gamma \in R_n$ множество $\{\omega : x(t, \omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{F}$. Нас будет интересовать только случай процесса с непрерывными траекториями (т. е. такого, что при всяком ω функция $x(t, \omega)$ непрерывна по t при $t \in [0,1]$).

Пусть $\mathcal{F}$ — монотонное семейство σ-алгебр из $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $t > s$. *Процесс* $\{x(t, \omega), \mathbf{P}\}$ *будет называться винеровским по отношению к* $\mathcal{F}_s$, *если его траектории непрерывны*, $x(0, \omega) = 0$ и

$$\mathbf{E}[x^i(t, \omega)/\mathcal{F}_s] = x^i(s, \omega), \quad i = 1, \ldots, n^*, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{E}[(x^i(t, \omega) - x^i(s, \omega))(x^j(t, \omega) - x^j(s, \omega))/\mathcal{F}_s] = \delta^{ij}(t - s), \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

Замечание. Из теоремы, доказанной Леви [9], [2], следует, что такой процесс имеет независимые приращения $x(t, \omega) - x(s, \omega)$, распределенные нормально с параметрами 0, $(t - s)$, т. е. он является винеровским процессом в общепринятом смысле слова. Легко видеть, что обычный винеровский процесс, определенный как непрерывный процесс, для которого величины $x(t_1, \omega), \ldots, x(t_k, \omega)$ имеют плотность совместного распределения

$$\left[(2\pi)^k \prod_1^k (t_i - t_{i-1})\right]^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^j - x_{i-1}^j)^2 (t_i - t_{i-1})^{-1}\right],$$

обладает свойствами (1.1) и (1.2), если взять в качестве $\mathcal{F}_s$ минимальную σ-алгебру, содержащую множества $\{\omega; x(u, \omega) \in \Gamma\}$, $u \leqslant s$.

---

* $E(\cdot/\mathcal{F}_s)$ — означает условное математическое ожидание, более подробно см. [2]

Мы будем в дальнейшем включать $\mathcal{F}_s$ в обозначение винеровского процесса и записывать его так: $\Xi = \{\xi(t, \omega), \mathbf{P}, \mathcal{F}_t\}$, понимания под $\xi(t, \omega)$ вектор $\xi(t, \omega) = \{\xi^1(t, \omega), \ldots, \xi^n(t, \omega)\}$.

Пусть $\Xi = \{\xi(t, \omega), \mathbf{P}, \mathcal{F}_t\}$ — винеровский процесс. *Стохастический процесс X будет называться процессом Ито по отношению к Ξ соответствующим паре $\Phi(t,\omega)$, $\Psi(t,\omega)$, если существует матрица $\Phi(t,\omega) = \|\Phi_j^i(t, \omega)\|$, $j = 1, \ldots, n$ и вектор $\Psi(t, \omega) = \{\Psi^1(t, \omega), \ldots, \Psi^n(t, \omega)\}$ такие, что*

$$x(t, \omega) = x(0, \omega) + \int_0^t \Phi(s, \omega)\, d\xi(s, \omega) + \int_0^t \Psi(s, \omega)\, ds * \qquad (1.3)$$

ии в координатах

$$x^i(t, \omega) = x^i(0, \omega) + \int_0^t \Phi_j^i(s, \omega)\, d\xi^j(s, \omega) + \int_0^t \Psi^i(s, \omega)\, ds. \qquad (1.3')$$

Интеграл по $d\xi^j$ здесь понимается как стохастический интеграл Ито, точнее говоря, как его «непрерывное ядро» (см. [2], [3]). Достаточными условиями, при которых правая часть (1.3) определена и непрерывна по $t \in [0,1]$, являются следующие ([3], [4]):

$\Phi(t, \omega)$ *и* $\Psi(t, \omega)$ *измеримы по совокупности переменных* (A_0)

$\Phi(t, \omega)$ $\mathcal{F}_t$*-измерима при фиксированном* t (A_1)

$$\int_0^1 |\Phi(t, \omega)|^2\, dt < \infty \quad \text{почти всюду} ** \qquad (A_2)$$

$$\int_0^1 |\Psi(t, \omega)|\, dt < \infty \quad \text{почти всюду}. \qquad (A_3)$$

Здесь и всюду в дальнейшем под измеримостью матрицы или вектора по некоторой σ-алгебре понимается измеримость всех ее компонент. Условия A_1 и A_2 далее будут часто употребляться применительно не к матрице, а к вектору без специальной оговорки об этом.

Для всякой $\mathcal{F}$-измеримой функции $\eta_i(\omega)$ мы будем обозначать $\mathbf{E}\{\eta_i(\omega)\}$ ее математическое ожидание, т. е. $\int_\Omega \eta_i(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega)$, а через $\mathbf{E}[\eta_i(\omega)/\mathcal{F}_s]$ — условное математическое ожидание $\eta_i(\omega)$ по мере $\mathbf{P}$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_s$. Мы неоднократно будем пользоваться тем, что при некоторых ограничениях

$$\mathbf{E}\left[\int_s^t \Phi(u, \omega)\, d\xi(u, \omega)\right] = 0, \qquad (1.4)$$

---

* Здесь и всюду в дальнейшем начальные условия $x(0, \omega)$ предполагаются независимыми с $\xi(t,\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

** Под нормой $|\Phi(t, \omega)|$ матрицы $\Phi(t, \omega)$ мы будем понимать $\sqrt{\sum_{ij} \overline{\Phi_j^i(t, \omega)^2}}$, под нормой вектора

$$\varphi(t, \omega) = \{\varphi^1(t, \omega), \ldots, \varphi^n(t, \omega)\} = \sqrt{\sum_1^n \overline{\varphi^i(t, \omega)^2}}.$$

$$\mathbf{E}\left[\int_s^t \Phi(u,\ \omega)\, d\xi(u,\ \omega)/\mathcal{F}_s\right] = 0. \tag{1.4}$$

Достаточным условием для этого является конечность интеграла (см. [2])

$$\int_\Omega \int_s^t |\ \Phi(u,\ \omega)\ |^2\, du\, \mathbf{P}(d\omega). \tag{1.5}$$

Нам понадобится также **лемма Фату**:

Пусть $\eta_n(\omega)$ *— последовательность неотрицательных интегрируемых функций, таких, что* $\int_\Omega \eta_n(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) < K < \infty$, *тогда* $\lim\limits_{h\to\infty} \inf \eta_n(\omega)$ *интегрируем и*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \eta_n(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \eta_n(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega). \tag{1.6}$$

Через $W_N(x)$ мы будем обозначать функцию вещественного переменного x такую, что

$$W_N(x) = \begin{cases} 1, & |\ x\ | \leqslant N \\ 0, & |\ x\ | > N \end{cases}.$$

2. Основная теорема 1. *Пусть* $\Xi = \{\xi(t, \omega), \mathbf{P}, \mathcal{F}_s\}$ *— винеровский процесс в* R_n, $x = \{x(t, \omega), \mathbf{P}\}$ *- процесс Ито относительно* Ξ, *соответствующей матрице* $\Phi(t, \omega)$ *и вектору* $\Psi(t, \omega)$, *для которых выполнены свойства* (A_0) — (A_3).

Пусть $\varphi(t, \omega) = \{\varphi^1(t, \omega), \ldots, \varphi^n(t, \omega)\}$ *- вектор, для которого выполнены* (A_0), (A_1), (A_2). *Положим*

$$\widetilde{\mathbf{P}}(d\omega) = \exp\left[\zeta_0^1(\varphi)\right] \mathbf{P}(d\omega), \tag{2.1}$$

где

$$\zeta_s^t(\varphi) = \int_s^t \varphi^i(u, \omega)\, \delta_{ij}\, d\xi^j(u, \omega) - \frac{1}{2}\int_s^t \left(\sum_{i=1}^n \varphi^i(u,\ \omega)^2\right) du, * \tag{2.2}$$

$$\widetilde{\xi}\ (t,\ \omega) = \xi(t,\ \omega) - \int_0^t \varphi(s, \omega)\, ds. \tag{2.3}$$

Предположим, что

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\Omega) = 1. \tag{2.4}$$

Тогда $\widetilde{\Xi} = \{\widetilde{\xi}\ (t,\ \omega), \widetilde{\mathbf{P}},\ \mathcal{F}_t\}$ *есть винеровский процесс, а* $\widetilde{x} = \{x(t, \omega), \widetilde{\mathbf{P}}$ *есть процесс Ито** по отношению к* $\widetilde{\Xi}$, *соответствующий матрице* $\Phi(t,\omega)$ *и вектору* $\widetilde{\Psi}(t,\ \omega) = \Psi(t,\ \omega) + \Phi(t,\ \omega)\, \varphi(t,\ \omega)$.

Доказательство. Сначала покажем, что Ξ — винеровский процесс. Для этого проверим выполнение (1.1) и (1.2) для $\widetilde{\xi}\ (t, \omega)$ относительно той

---

* $\varphi = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ играет роль вектора, поэтому приходится употреблять более громоздкое выражение (2.2), хотя было бы проще писать $\int_s^t \varphi_i(u, \omega)\, d\xi^i(t, \omega)$.

** В дальнейшем, чтобы избежать путаницы, математические ожидания по мере $\widetilde{\mathbf{P}}(d\omega)$ будут обозначаться $\widetilde{\mathbf{E}}(\cdot)$

е системы $\mathcal{F}_s$, но уже по новой мере $\widetilde{\mathbf{P}}(d\omega)$. Нам понадобится формула мены переменных в стохастическом интеграле Ито.

Пусть x — процесс Ито относительно Ξ со ответствующий матрице $\Phi(t, \omega)$ вектору $\Psi(t, \omega)$, которые удовлетворяют $(A_0) - (A_3)$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$ дважды-непрерывно-дифференцируемая функ- ия в R_n. Тогда

$$f(x(t, \omega)) - f(x(s, \omega)) = \int_s^t f'_{x_i}(x, (u, \omega))\, \Phi_j^i(u, \omega)\, d\xi^j(u, \omega) +$$

$$+ \int_s^t f'_{x_i}(x(u, \omega))\, \Psi^i(u, \omega)\, du + \frac{1}{2} \int_s^t \sum_k f''_{x_i x_j}(x(u, \omega))\, \Phi_k^i(u, \omega)\, \Phi_k^j(u, \omega)\, du. \quad (2.5)$$

оказательство этого утверждения содержится в работе К. Ито [3]. В стности, для $f(x) = \exp x$ получаем, подставляя вместо x $\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)$

$$\exp\left[\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right] = 1 + \int_s^t \varphi^i(u, \omega)\, \delta_{ij}\, d\xi^j(u, \omega) \exp\left[\overset{u}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right]. \quad (2.5')$$

з (2.5') мы сразу можем вывести следующий важный результат.

Лемма 1. *Если в условиях теоремы 1 при почти всех* (t, ω) $< c_1 \leqslant |\varphi(t, \omega)| \leqslant c_2$, *то* $\exp\left[\alpha \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right]$ *интегрируема и при* $\alpha > 1$

$$\exp\left[\frac{(\alpha^2 - \alpha)}{2}(t - s)\, c_1^2\right] \leqslant \mathbf{E}\left[\exp\left[\alpha \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right]\right] \leqslant \exp\left[\frac{(\alpha^2 - \alpha)}{2}(t - s)\, c_2^2\right]. \quad (2.6)$$

Доказательство. Из формулы (2.5') имеем:

$$\exp\left[\alpha \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right] = 1 + \alpha \int_s^t \varphi^i(u, \omega)\, \delta_{ij} \exp\left[\alpha \overset{u}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right] d\xi^j(u, \omega) +$$

$$+ \frac{(\alpha^2 - \alpha)}{2} \int_s^t \left(\sum \varphi^i(u, \omega)^2\right) \exp\left[\alpha \overset{u}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right] du. \quad (2.7)$$

бозначим

$$\eta_N(u, \omega) = W_N\left(\sup_{s \leqslant v \leqslant u} \exp\left[\alpha \overset{v}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right]\right) \exp\left[\alpha \overset{n}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right].$$

Очевидно, что

$$\exp\left[\alpha \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right] = \lim_{N \to \infty} \eta_N(t, \omega), \quad (2.8)$$

$$\eta_N(t, \omega) \leqslant 1 + \alpha \int_s^t \varphi^i(u, \omega)\, \delta_{ij}\, \eta_N(u, \omega)\, d\xi^j(u, \omega) +$$

$$+ \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \int_s^t \sum_{i=1}^n \varphi^i(u, \omega)^2\, \eta_N(u, \omega)\, du. \quad (2.9)$$

Так как подынтегральная функция в стохастическом интеграле ограничена и поэтому (1.4) выполнено, то

$$\mathbf{E}\,[\eta_N(t,\ \omega)] \leqslant 1 + \frac{(\alpha^2-\alpha)}{2}\int_s^t c_2^2\,\mathbf{E}\,[\eta_N(u,\ \omega)]\,du.$$

Из этого неравенства обычным способом получаем, что

$$\mathbf{E}\,[\eta_N(t,\ \omega)] \leqslant \exp\left[\frac{(\alpha^2-\alpha)}{2}(t-s)\,c_2^2\right].$$

Переходя по N к пределу, мы получаем в силу леммы Фату правую оценку в (2.6). Оценка снизу легко может быть выведена из (2.7), если заметить, что из доказанного следует, что математическое ожидание стохастического интеграла равно 0, т. е. для подынтегральной функции выполнено (1.5).

Лемма 2. *Если* $\varphi(t,\ \omega)$ *удовлетворяет* $(A_0)-(A_2)$, *то*

$$\mathbf{E}\left[\exp\left[\int_s^t \zeta(\varphi)\right]\right] \leqslant 1, \tag{2.10}$$

почти всюду

$$\mathbf{E}\left[\exp\left[\int_s^t \zeta(\varphi)\right] \Big/ \mathcal{F}_s\right] \leqslant 1 \tag{2.11}$$

и для каждой $\mathcal{F}_t$*-измеримой неотрицательной функции* $\eta(\omega)$

$$\widetilde{\mathbf{E}}\,[\eta(\omega)] \leqslant \mathbf{E}\left[\eta(\omega)\exp\left[\int_0^t \zeta(\varphi)\right]\right]. \tag{2.12}$$

Если же выполнено (2.4), *то в* (2.10) — (2.12) *имеет место знак равенства, а* $\eta(\omega)$ *может считаться произвольной функцией, для которой существует* $\widetilde{\mathbf{E}}\,[\eta(\omega)]$.

Доказательство. Для ограниченного вектора $\varphi(t,\ \omega)$ из (2.6) при $\alpha = 1$ следует (2.10). Всякий вектор $\varphi(t,\ \omega)$, удовлетворяющий условиям $(A_0)-(A_2)$ можно аппроксимировать последовательностью ограниченных векторов $\varphi_N(t,\ \omega)$, удовлетворяющих $(A_0)-(A_2)$ так, чтобы почти всюду

$$\int_0^1 |\,\varphi_N(t,\ \omega) - \varphi(t,\ \omega)\,|^2\,dt \to 0.$$

Из свойств стохастического интеграла известно, что при этом условии

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^t \varphi_N^i(s,\ \omega)\,\delta_{ij}\,d\xi^j(s,\ \omega) - \int_0^t \varphi^i(s,\ \omega)\,\delta_{ij}\,d\xi^j(s,\ \omega)\right| \to 0$$

почти всюду. В силу очевидной сходимости почти всюду

$$\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n \varphi_N^i(u,\ \omega)^2\right)du \to \int_0^1\left(\sum_{i=1}^n \varphi^i(u,\ \omega)^2\right)du$$

мы видим, что почти всюду

$$\exp\left[\int_s^t \zeta(\varphi)\right] = \lim_{N\to\infty}\exp\left[\int_s^t \zeta(\varphi_N)\right];$$

после чего (2.10) вытекает из леммы Фату.

Обозначим теперь через A_n множество, на котором $\mathbf{E}\left[\exp\left(\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right) \Big/ \mathcal{F}_s\right] >$ $1+\frac{1}{n}$, $A_n \in \mathcal{F}_s$; рассмотрим вместо $\varphi(t, \omega)$ функцию $\chi(A_n)\varphi(t, \omega)$, где $A_n)$ — характеристическая функция множества A_n. Имеем очевидное равенство:

$$\exp\left[\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\chi(A)\varphi)\right] = \chi(A_n)\exp\left(\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\right) + (1-\chi(A_n)).$$

Интегрируя обе части по Ω и пользуясь (2.10), получаем

$$1 \geqslant \mathbf{E}\left[\exp\left(\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\chi(A)\varphi)\right)\right] = \mathbf{P}(\Omega \setminus A_n) + \int\limits_{A_n} \exp\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\,\mathbf{P}(d\omega).$$

силу свойств условного математического ожидания правая часть равна:

$$\mathbf{P}(\Omega \setminus A_n) + \int\limits_{A_n} \mathbf{E}\left[\exp\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)/\mathcal{F}_s\right]\mathbf{P}(d\omega) > 1 + \frac{1}{n}\mathbf{P}(A_n).$$

этого следует, что $\mathbf{P}(A) = 0$ при всех n, что доказывает (2.11) со ком $\leqslant$. Для доказательства (2.12) применим формулу

$$\widetilde{\mathbf{E}}[\eta_1(\omega)] = \mathbf{E}\left[\eta_1(\omega)\exp\left(\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\right)\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\eta_1(\omega)\exp\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)/\mathcal{F}_s\right]\right],$$

можно сделать в силу существования левой части равенства. Вынося ей $\mathcal{F}_s$-измеримую функцию $\eta(\omega)\exp\overset{s}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)$ за знак условного математического ожидания и пользуясь (2.11), получаем утверждение (2.12).

Если выполнено (2.4), то мы имеем

$$1 = \mathbf{E}\left[\exp\left(\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\right)\right] = \mathbf{E}\left[\exp\overset{s}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\,\mathbf{E}\left[\exp\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\,\mathbf{E}\left[\exp\overset{1}{\underset{t}{\zeta}}(\varphi)/\mathcal{F}_t\right]\right]\right] \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left[\exp\overset{s}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\,\mathbf{E}\left[\exp\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)/\mathcal{F}_s\right]\right].$$

означим через B_n множество, на котором $\mathbf{E}\left[\exp\overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)/\mathcal{F}_s\right] \leqslant 1 - \frac{1}{n}$. илу (2.11) имеем:

$$1 \leqslant \int\limits_{\Omega \setminus B_n} \exp\overset{s}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\;\mathbf{P}(d\omega) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\int\limits_{B_n} \exp\overset{s}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\,\mathbf{P}(d\omega). \qquad (2.13)$$

так как $\exp\overset{s}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi) > 0$ почти всюду, а $\int\limits_{\Omega} \exp\overset{s}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\,\mathbf{P}(d\omega) < 1$ в силу (2.10), из (2.13) следует, что $\mathbf{P}(B_n) = 0$ при всех n, что доказывает знак ра- ства в (2.11). Из этого результата легко следует и (2.12).

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ σ-алгебры, такие, что $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}$ пусть $\mathcal{F}''$-измеримая функция, такая, что $\pi(\omega) = \pi_1(\omega)\pi_2(\omega)$, $\pi_1(\omega) > 0$, $\omega) > 0$, где $\pi_1(\omega)$ — $\mathcal{F}'$-измерима и*

$$\mathbf{E}[\pi_2(\omega)/\mathcal{F}'] = 1. \qquad (2.14)$$

Положим $\mathbf{P}'(d\omega) = \pi(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega)$. *Тогда для любой* F'' *измеримой* $\eta_1(\omega)$, *для которой существует* $\mathbf{E}'[\eta(\omega)]$* *выполнено соотношение*:

$$\mathbf{E}'[\eta_1(\omega)/\mathcal{F}'] = \mathbf{E}[\pi_2(\omega)\,\eta(\omega)/\mathcal{F}']. \tag{2.15}$$

Доказательство. В силу свойств условного математического ожидания для любой $\mathcal{F}'$-измеримой ограниченной функции $\lambda(\omega)$

$$\mathbf{E}'[\lambda(\omega)\,\eta(\omega)] = \mathbf{E}'[\lambda(\omega)\,\mathbf{E}'[\eta(\omega)/\mathcal{F}']]. \tag{2.16}$$

Из определения $\mathbf{P}'(d\omega)$ следует, что

$$\mathbf{E}'[\lambda(\omega)\,\eta_1(\omega)] = \mathbf{E}[\lambda(\omega)\,\eta_1(\omega)\,\pi_1(\omega)\,\pi_2(\omega)] = \mathbf{E}[\lambda(\omega)\,\pi_1(\omega)\,\mathbf{E}[\eta_1(\omega)\,\pi_2(\omega)/\mathcal{F}']]. \tag{2.17}$$

В силу (2.14) последний член может быть приведен к виду

$$\mathbf{E}[\lambda(\omega)\,\pi_1(\omega)\,\pi_2(\omega)\,\mathbf{E}[\eta_1(\omega)\,\pi_2(\omega)/\mathcal{F}']] = \mathbf{E}'[\lambda(\omega)\,\mathbf{E}[\eta_1(\omega)\,\pi_2(\omega)/\mathcal{F}']]. \tag{2.18}$$

Выбирая в качестве $\lambda(\omega)$ характеристическую функцию множества $A \subset \mathcal{F}$, получаем из (2.16), (2.17) и (2.18)

$$\int_A \mathbf{E}'[\eta(\omega)/\mathcal{F}']\,\mathbf{P}'(d\omega) = \int_A \mathbf{E}[\eta(\omega)\,\pi_2(\omega)/\mathcal{F}']\,\mathbf{P}'(d\omega),$$

что в силу $\mathcal{F}'$-измеримости подынтегральных функций доказывает равенство (2.15).

Следствие. Положим $\pi(\omega) = \exp\int_0^t \zeta(\varphi)$, $\pi_1(\omega) = \exp\int_0^s \zeta(\varphi)$, $\pi_2(\omega) = \exp\int_s^t \zeta(\varphi)$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_s$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}_t$. Из (2.11) и леммы 3 следует, что для любой $\mathcal{F}_t$-измеримой функции $\eta_1(\omega)$, для которой существует $\widetilde{\mathbf{E}}[\eta_1(\omega)]$, выполнено соотношение:

$$\widetilde{\mathbf{E}}\left[\eta(\omega)/\mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}\left[\eta(\omega)\exp\int_s^t \zeta(\varphi)/\mathcal{F}_s\right]. \tag{2.15'}$$

Чтобы показать, что для $\widetilde{\Xi}$ выполняются (1.1) и (1.2) надо применить (2.5) и (2.15′) к функциям $\widetilde{\xi}^i(t,\omega) - \widetilde{\xi}^i(s,\omega)$ и $(\widetilde{\xi}^i(t,\omega) - \widetilde{\xi}^i(s,\omega))(\widetilde{\xi}^j(t,\omega) - \widetilde{\xi}^j s,\omega))$. Однако сначала надо доказать существование математических ожиданий по мере $\widetilde{\mathbf{P}}(d\omega)$ для этих функций.

Лемма 4. *Пусть* $\widetilde{\xi}(t,\omega)$ *определена по формуле* (2.3). *Тогда*

$$\widetilde{\mathbf{E}}[\widetilde{\xi}(t,\omega)^2] \leqslant nt. \tag{2.19}$$

Доказательство. По определению

$$\mathbf{E}[\widetilde{\xi}^i(t,\omega)^2] = \mathbf{E}\left[\left(\xi^i(t,\omega) - \int_0^t \varphi^i(s,\omega)\,ds\right)^2 \exp\int_0^1 \zeta(\varphi)\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[\left(\xi^i(t,\omega) - \int_0^t \varphi^i(s,\omega)\,ds\right)^2 \exp\int_0^t \zeta(\varphi)\exp\int_t^1 \zeta(\varphi)\right].$$

Применив теперь к первым двум сомножителям формулы (2.5) и (2.5′), получим (опуская для краткости параметр ω):

$$\left(\xi^i(t,\omega) - \int_0^t \varphi^i(s,\omega)\,ds\right)^2 \exp\int_0^t \zeta(\varphi) = \left(2\int_0^t \widetilde{\xi}^i(s)\,d\xi^i(s) - 2\int_0^t \xi^i(s)\,\varphi^i(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t ds\right)\left(1 + \int_0^t \varphi^i(s)\,\delta_{ij}\exp\int_0^s \zeta(\varphi)\,d\xi^j(s)\right). \tag{2.20}$$

* Через $E'[\cdot]$ обозначены математические ожидания, взятые по мере $P'(d\omega)$.

Для стохастических интегралов имеют место соотношения ([4]):

$$\int_0^t f_i(s)\,d\xi^i(s)\int_0^t g_j(s)\,d\xi^j(s)=\int_0^t\left(\sum_{i=1}^n f_i(s)\,g_i(s)\right)ds+$$

$$+\int_0^t f_i(s)\left(\int_0^s g_j(u)\,d\xi^j(u)\right)d\xi^i(s)+\int_0^t g_i(s)\left(\int_0^s f_j(u)\,d\xi^j(u)\right)d\xi^i(s), \quad (2.21)$$

$$\int_0^t f_i(s)\,d\xi^i(s)\int_0^t g(s)\,ds=\int_0^t f_i(s)\left(\int_0^s f(u)\,du\right)d\xi^i(s)+$$

$$+\int_0^t g(s)\left(\int_0^s f_i(u)\,d\xi^i(u)\right)ds. \quad (2.22)$$

помощью (2.21) и (2.22) мы преобразуем (2.20) к следующему виду

$$\int_0^t\widetilde{\xi}^i(s)\,d\xi^i(s)-2\int_0^t\widetilde{\xi}^i(s)\,\varphi^i(s)\,ds+t\exp\int_0^t\zeta(\varphi)+\int_0^t\widetilde{\xi}^i(s)\,\varphi^i(s)\exp\int_0^s\zeta(\varphi)\,ds+$$

$$+2\int_0^t\widetilde{\xi}^i(s)\left(\int_0^s\varphi^k(u)\,\delta_{kj}\exp\int_0^u\zeta(\varphi)\,d\xi^j(u)\right)d\xi^i(s)+2\int_0^t\varphi^k(s)\,\delta_{kj}\exp\int_0^s\zeta(\varphi)\times$$

$$\times\left(\int_0^s\widetilde{\xi}^i(u)\,d\xi^i(u)\right)d\xi^j(s)-2\int_0^t\widetilde{\xi}^i(s)\,\varphi^i(s)\left(\int_0^s\varphi^k(u)\,\delta_{kj}\exp\int_0^u\zeta(\varphi)\,d\xi^j(u)\right)ds-$$

$$-\int_0^t\varphi^k(s)\,\delta_{kj}\exp\int_0^s\zeta(\varphi)\left(\int_0^s\widetilde{\xi}^i(u)\,\varphi^i(u)\,du\right)d\xi^j(s). \quad (2.23)$$

Теперь заметим, что в силу (2.5′) второй и седьмой члены (2.23) в сум- отличаются от четвертого только знаком. После сокращения и группи- вки мы получаем окончательно:

$$\widetilde{\xi}^i(t,\omega)^2\exp\int_0^t\zeta(\varphi)=t\exp\int_0^t\zeta(\varphi)+2\int_0^t\widetilde{\xi}^i(s)\exp\int_0^s\zeta(\varphi)\,d\xi^i(s)+$$

$$+\int_0^t\varphi^k(s)\,\delta_{kj}\exp\int_0^s\zeta(\varphi)\left(\int_0^s\widetilde{\xi}^i(u)\,d\xi^i(u)-\int_0^s\widetilde{\xi}^i(u)\,\varphi^i(u)\,du\right)d\xi^j(s). \quad (2.24)$$

Если теперь предположить $|\varphi(u)|$ ограниченной, то для функций, стоя- их под знаками стохастических интегралов будет выполнено (1.5), а сле- вательно, и (1.4). Принимая во внимание (2.11), мы получаем

$$\widetilde{\mathbf{E}}\,[\widetilde{\xi}^2(t,\omega)]=nt.$$

бщем случае надо рассмотреть последовательность ограниченных $\varphi_N(t,\omega)$ кую же, как и в доказательстве леммы 2. Нужное неравенство вытекает, к и там, из леммы Фату.

Лемма 5. *Пусть* $\int_\Omega\exp\int_0^1\zeta(\varphi)\,\mathbf{P}(d\omega)=1$, *и пусть* $\varphi_N(t,\omega)$ — *последователь-*

ть ограниченных функций, для которых $\int_s^t\zeta(\varphi_N)\to\int_s^t\zeta(\varphi)$ *по мере* $\mathbf{P}(d\omega)$.

гда

$$\int_\Omega\left|\exp\int_s^t\zeta(\varphi_N)-\exp\int_s^t\zeta(\varphi)\right|\mathbf{P}(d\omega)\to 0\ \textit{при}\ N\to\infty. \quad (2.25)$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$\int_{\Omega} \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)_N \, \mathbf{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) \, \mathbf{P}(d\omega) = 1.$$

Обозначим $\Omega_{N,\varepsilon}$ множество $\left\{\omega : \left| \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) - \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi_N) \right| < \varepsilon \right\}$. По условию $\mathbf{P}(\Omega_{N,\varepsilon}) > 1 - \delta_N(\varepsilon)$, где $\delta_N(\varepsilon) \to 0$ при $N \to \infty$. В силу интегрируемости $\exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)$

$$\int_{\Omega_{N,\varepsilon}} \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) \, \mathbf{P}(d\omega) = 1 - \int_{\Omega \setminus \Omega_{N,\varepsilon}} \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) \, \mathbf{P}(d\omega) > 1 - \varepsilon,$$

если только $\delta_N(\varepsilon)$ меньше некоторого δ. При этом

$$\int_{\Omega_{N,\varepsilon}} \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi_N) \, \mathbf{P}(d\omega) \geqslant 1 - 2\varepsilon,$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{N,\varepsilon}} \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi_N) \, \mathbf{P}(d\omega) \leqslant 2\varepsilon.$$

Окончательно

$$\int_{\Omega} \left| \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) - \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi_N) \right| \mathbf{P}(d\omega) \leqslant \int_{\Omega_{N,\varepsilon}} \left| \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) - \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi_N) \right| \mathbf{P}(d\omega) +$$

$$+ \int_{\Omega \setminus \Omega_{N,\varepsilon}} \left(\left| \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) \right| + \left| \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi_N) \right| \right) \mathbf{P}(d\omega) \leqslant 4\varepsilon.$$

В силу того, что при $N \to \infty$ можно выбирать ε сколь угодно малым, это неравенство доказывает лемму.

Приступим теперь к доказательству для $\widetilde{\Xi}$ соотношений (1.1) и (1.2). Соотношение (1.1) в силу (2.15′) перепишется так

$$\mathbf{E}\left[\left(\widetilde{\xi}^i(t, \omega) - \widetilde{\xi}^i(s, \omega) \right) \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) / \mathcal{F}_s \right] = 0. \tag{2.26}$$

В случае ограниченного $\varphi(t, \omega)$ мы можем, пользуясь (1.1) для Ξ, а также формулами (2.5′), (1.4), (2.21) и (2.22), получить следующие соотношения (опуская для краткости ω)

$$\widetilde{\mathbf{E}}\left[\xi^i(t) - \widetilde{\xi}^i(s) / \mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}\left[\left(\xi^i(t) - \xi^i(s) - \int_s^t \varphi^i(u)\, du \right) \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) / \mathcal{F}_s \right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[\left(\xi^i(t) - \xi^i(s) \right) \int_s^t \varphi^j(u)\, \delta_{jk} \exp \overset{u}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\, d\xi^k(u) / \mathcal{F}_s \right] +$$

$$+ \mathbf{E}\left[- \int_s^t \varphi^i(u) \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\, du / \mathcal{F}_s \right] = \mathbf{E}\left[\int_s^t \varphi^i(u) \exp \overset{u}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\, du / \mathcal{F}_s \right] +$$

$$+ \mathbf{E}\left[- \int_s^t \varphi^i(u) \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)\, du / \mathcal{F}_s \right] = 0,$$

к как в силу предположения об ограниченности φ условные математиче-ие ожидания всех стохастических интегралов, появившихся при преобра-ваниях, равны нулю, а в силу (2.11) последние слагаемые отличаются лько знаком.

Рассмотрим $\varphi(t, \omega)$ удовлетворяющий условиям теоремы 1. Пусть (t, ω) — последовательность ограниченных векторов, удовлетворяющих), (A_1) и (A_2) и таких, что

$$\int_0^1 | \varphi_N(t, \omega) - \varphi(t, \omega) |^2 dt \to 0$$

чти всюду. Как упоминалось выше (см. доказательство леммы 2) это еспечивает сходимость $\zeta(\varphi_N)$ к $\zeta(\varphi)$, а в силу леммы 2 и леммы 5 $\left| \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi_N) - \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi) \right| \mathbf{P}(d\omega) \to 0$. Легко видеть, что при этом

$$\widetilde{\xi}^i_N(t) = \xi^i(t) - \int_0^t \varphi^i_N(s)\, ds \to \widetilde{\xi}^i(t),$$

и $N \to \infty$. Однако законность предельного перехода в (2.26) требует основания.

Заметим, что если $f_n(\omega) \to f(\omega)$ почти всюду, то в $\mathbf{E}[f(\omega)/\mathcal{F}_s] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[f_n(\omega)/\mathcal{F}_s]$ почти всюду *, тогда когда $|f_n(\omega)| < g(\omega)$, так что $[g(\omega)] < \infty$ (см. [2], § 8 гл. 1) или, если $\boldsymbol{E}[f(\omega)]$ существует и $[|f_n(\omega) - f(\omega)|] \to 0$, то $\mathbf{E}[f_n(\omega)/\mathcal{F}_s] \to \mathbf{E}[f(\omega)/\mathcal{F}_s]$ по мере $\mathbf{P}(d\omega)$, а слеовательно, по некоторой подпоследовательности $f_{n_k}(\omega)$ имеет место сходиость почти всюду.

Итак, пусть (2.26) выполнено для $\widetilde{\xi}^i_N(t)$. Рассмотрим

$$\eta^i_{N,n}(t) = W_n\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\widetilde{\xi}^i_N(t)|\Big)\widetilde{\xi}^i_N(t).$$

В силу известных свойств мартингалов, (2.26) сохранится в силе, если менить $\widetilde{\xi}^i_N(t)$ на $\widetilde{\eta}^i_{N,n}(t)$

$$\mathbf{E}[(\eta^i_{N,n}(t) - \eta^i_{N,n}(s)) \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi_N)/\mathcal{F}_s] = 0. \qquad (2.27)$$

---

* Действительно, из равенства $\int_A (\mathbf{E}[f_n(\omega)/\mathcal{F}_s] - \mathbf{E}[f(\omega)/\mathcal{F}_s])\, \mathbf{P}(d\omega) - \int_A [f_n(\omega) - f(\omega)]\, \mathbf{P}(d\omega)$ для любого A из $\mathcal{F}_s$ следует, что $\sup_{\|g\|<1} \left| \int g(\omega) (\mathbf{E}[f_n(\omega)/\mathcal{F}_s] - \mathbf{E}[f(\omega)/\mathcal{F}_s])\, \mathbf{P}(d\omega) \right| \leqslant \|g\| \varepsilon(n)$ для любой $\mathcal{F}_s$-измеримой $g(\omega)$ при этом $\varepsilon(n) \to 0$ при $\to \infty$. Если бы сходимость по мере отсутствовала, то для некоторой последовательности ожеств Ω_k мы имели бы $\mathbf{P}(\Omega_k) \geqslant \varepsilon > 0$ $|\mathbf{E}[f_{n_k}(\omega)/\mathcal{F}_s] - \mathbf{E}[f(\omega)/\mathcal{F}_s]| > \delta > 0$ на . Полагая $g_k(\omega) = \operatorname{sign}[\mathbf{E}[f_{n_k}(\omega)/\mathcal{F}_s] - \mathbf{E}[f(\omega)/\mathcal{F}_s]]$, мы получили бы, что $\|g_k\| \varepsilon(n) > \delta\varepsilon$ при всех n, что невозможно.

Но так как $\eta^i_{N,n}(t)$ ограничено, для а φ_N выполнены условия леммы 5, то мы можем сделать предельный переход в (2.27) при $N \to \infty$ и получить

$$\mathbf{E}\,[(\eta^i_n(t) - \eta^i_n(s)) \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)/\mathcal{F}_s] = 0, \tag{2.28}$$

где $\eta^i_n(t) = W_n(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} |\,\widetilde{\xi}^i(s)\,|\,)\,\widetilde{\xi}^i(s)$. Теперь заметим, что $|\,\eta^i_n(t) - \eta^i_n(s)\,| \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)$ мажорируется интегрируемой функцией $[\,|\,\widetilde{\xi}^i(t)\,| + |\,\widetilde{\xi}^i(s)\,|\,] \exp \overset{t}{\underset{s}{\zeta}}(\varphi)$ и сделаем предельный переход по n, что заканчивает доказательство (2.26) в общем случае.

Проверка выполнения для $\widetilde{\xi}(t)$ соотношения (1.2) проводится аналогичным образом. Для этого надо повторить вышеприведенные рассуждения, заменяя $\widetilde{\xi}^i(t) - \widetilde{\xi}^i(s)$ на $\widetilde{\xi}^i(t)\,\widetilde{\xi}^j(t) - \widetilde{\xi}^i(s)\,\widetilde{\xi}^j(s)$, что дает требуемый результат, так как

$$\widetilde{\mathbf{E}}\,[(\widetilde{\xi}^i(t) - \widetilde{\xi}^i(s))(\widetilde{\xi}^j(t) - \widetilde{\xi}^j(s)/\mathcal{F}_s] = \widetilde{\mathbf{E}}\,[\widetilde{\xi}^i(t)\,\widetilde{\xi}^j(t) + \widetilde{\xi}^i(s)\,\widetilde{\xi}^j(s) - \widetilde{\xi}^i(t)\,\widetilde{\xi}^j(s) - \widetilde{\xi}^j(t)\,\widetilde{\xi}^i(s)/\mathcal{F}_s] = \widetilde{\mathbf{E}}\,[\widetilde{\xi}^i(t)\,\widetilde{\xi}^j(t) - \widetilde{\xi}^i(s)\,\widetilde{\xi}^j(s)/\mathcal{F}_s],$$

поскольку по доказанному выше

$$\widetilde{\mathbf{E}}\,[\widetilde{\xi}^i(t)\,\widetilde{\xi}^j(s)/\mathcal{F}_s] = \widetilde{\mathbf{E}}\,[\widetilde{\xi}^i(s)\,\widetilde{\xi}^j(t)/\mathcal{F}_s] = \widetilde{\xi}^i(s)\,\widetilde{\xi}^j(s).$$

С помощью (2.15′), (2.5), (2.21) и (2.22) мы легко получим в случае ограниченного φ, что

$$\widetilde{\mathbf{E}}\,[(\widetilde{\xi}^i(t) - \widetilde{\xi}^i(s))(\widetilde{\xi}^j(t) - \widetilde{\xi}^j(s))/\mathcal{F}_s] = \widetilde{\mathbf{E}}\,[\xi^i(t)\,\xi^j(t) + \widetilde{\xi}^i(s)\,\widetilde{\xi}^j(s)/\mathcal{F}_s] = \delta^{ij}(t-s)$$

после чего, так же как и выше, надо сделать предельный переход.

Для окончания доказательства теоремы 1 надо вывести уравнения для $\widetilde{X}$.

Лемма 6. *Пусть* $\Xi = (\xi, t, \omega)$, $\mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ *и* $\widetilde{\Xi} = (\widetilde{\xi}(t, \omega), \widetilde{\mathbf{P}}, \mathcal{F}_s)$ *— винеровские процессы теоремы 1 и пусть матрица* $\theta(t, \omega)$ *удовлетворяет* (A_0), (A_1), (A_2). *Тогда существуют оба стохастических интеграла* $\int\limits_0^t \theta(s, \omega)\,d\xi(s, \omega)$ *и* $\int\limits_0^t \theta(s, \omega)\,d\widetilde{\xi}(s, \omega)$, *причем*

$$\int\limits_0^t \theta(s, \omega)\,d\xi(s, \omega) = \int\limits_0^t \theta(s, \omega)\,d\widetilde{\xi}(s, \omega) + \int\limits_0^t \theta(s, \omega)\,\varphi(s, \omega)\,ds. \tag{2.29}$$

Доказательство. Существование обоих интегралов следует из того, что (A_2) есть свойство, которое выполняется почти всюду для одной из мер $\mathbf{P}$ или $\widetilde{\mathbf{P}}$ коль скоро оно выполнено для другой, а (A_0) и (A_1) есть свойства измеримости, не связанные с мерой. Что касается равенства (2.29),

оно очевидно для ступенчатых по t матриц $\theta(t, \omega)$. Для всякой матрицы $\theta(t, \omega)$, удовлетворяющей условиям леммы, можно построить последовательность ступенчатых матриц $\theta_n(t, \omega)$ так, чтобы

$$\int_0^1 | \theta_n(t, \omega) - \theta(t, \omega) |^2 dt \to 0$$

почти всюду по обеим мерам $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$. В силу уже упоминавшегося свойства стохастического интеграла (см. доказательство леммы 2) можно перейти к пределу в обоих стохастических интегралах; что касается обыкновенного, то в нем переход к пределу очевиден, так как

$$\int_0^1 | \theta_n(s, \omega) - \theta(s, \omega) | | \varphi(s, \omega) | ds \leqslant \sqrt{\int_0^1 (\theta_n(s, \omega) - \theta(s, \omega))^2 ds} \times$$

$$\times \sqrt{\int_0^1 | \varphi(s, \omega) |^2 ds} \to 0$$

почти всюду.

Применив лемму 6 к стохастическому интегралу в равенстве (1.3), мы закончим доказательство теоремы 1.

Замечание. Анализ доказательств теоремы 1 показывает, что нетривиальным ограничением на $\varphi(s, \omega)$ является требование (2.4), так как все остальные обеспечивают существование плотности $\exp \overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)$. Возникает вопрос в каких случаях (2.4) выполняется, и в каких — нет. Из леммы 1 следует, что это так для ограниченных φ — факт известный и ранее [8]. Было бы очень важно ослабить его и заменить ограничениями на $\int_0^1 | \varphi |^2 dt$, что важно в приложениях. Ниже в § 3 выполнение (2.4) будет доказано для одного практически важного случая.

3. В этом пункте мы рассмотрим частный случай процессов Ито, которые мы будем называть процессами диффузионного типа. Через C_n мы будем обозначать пространство всех непрерывных на $[0,1]$ функций $x(t)$ со значениями в R_n, $x(t) = \{x(t)^1, \ldots, x(t)^n\}$, через U σ-алгебру подмножеств C_n, порожденную множествами вида * $\{x(\cdot), x(t) \in \Gamma\}$, где Γ — борелевское множество в R_n, через U_t — подалгебру U, порожденную множествами $\{x(\cdot), x(s) \in \Gamma\}$, $s \leqslant t$. Под U и U_t-измеримостью матрицы $B(t, x(\cdot)) = \| B_j^i(t, x(\cdot)) \|$ или вектора $A(t, x(\cdot)) = \{A^1(t, x(\cdot)), \ldots, A^n(t, x(\cdot))\}$ мы будем понимать U и U_t-измеримость функционалов $B_j^i(t, x(\cdot))$ и $A^i(t, x(\cdot))$.

Всякий процесс Ито можно рассматривать как отображение $\Omega \to C_n$, задаваемое функцией $x(\cdot)_\omega = \{x(t, \omega), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Это отображение $(\mathcal{F}, U)$ измеримо и поэтому порождает распределение вероятностей μ_x в C_n. Не-

* Через $x(\cdot)$ мы обозначим точку в C_n, $x(\cdot) = \{x(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

сложное рассуждение показывает, что мера $\mu_{\widetilde{X}}$, построенная по процессу $\widetilde{X}$ теоремы 1, абсолютно-непрерывна по мере μ_X.

Пусть $X=\{x(t,\omega), \mathbf{P}\}$ процесс Ито по отношению к $\Xi=\{\xi(t,\omega), \mathbf{P}, \mathcal{F}_t\}$, соответствующий матрице $\Phi(t,\omega)$ и вектору $\Psi(t,\omega)$. Мы назовем его процессом диффузионного типа, если существуют U_t-измеримые матрица $B(t, x(\cdot))$ и вектор $A(t, x(\cdot))$ такие, что с вероятностью 1

$$\Phi(t,\omega)=B(t, x(\cdot)_\omega), \quad \Psi(t,\omega)=A(t, x(\cdot)_\omega).$$

В этом случае уравнение (1.3) запишется в виде

$$x(t,\omega)=x(0,\omega)+\int_0^t B(s, x(\cdot)_\omega)\, d\xi(s,\omega)+\int_0^A A(s, x(\cdot)\omega)\, ds \qquad (3.1)$$

$B(t, x(\cdot))$ мы будем называть диффузионной матрицей, $A(t, x(\cdot))$ — вектором переноса. Уравнения такого типа исследовались И. И. Гихманом [5] и К. Ито [3], (см. также [2]) у последнего

$$B(t, x(\cdot)_\omega)=B(t, x(t,\omega)), \quad A(t, x(\cdot)_\omega)=A(t, x(t,\omega)).$$

Мы скажем, что уравнение (3.1) имеет единственное решение, если при заданном начальном распределении и при любом выборе винеровского процесса Ξ решения $x(t,\omega)$ уравнения (3.1) порождают в C_n единственную меру μ_x, не зависящую от выбора Ξ.

Лемма 7. *Пусть $X=\{x(t,\omega), \mathbf{P}\}$ — процесс диффузионного типа, связанный с винеровским процессом $\Xi=\{\xi(t,\omega), \mathbf{P}, \mathcal{F}_t\}$ уравнением (3.1), относительно которого предположим, что оно имеет единственное решение. Пусть $Y=\{y(t,\omega), \mathbf{P}\}$ — процесс Ито относительно Ξ, соответствующий матрице $\Phi(t,\omega)=B(t, y(\cdot)_\omega)$ и вектору $\Psi(t,\omega)=A(t, Y(\cdot)_\omega)+B(t, Y(\cdot)_\omega)\varphi(t,\omega)$, где вектор $\varphi(t,\omega)$ обладает свойствами $(A_0)-(A_2)$ и для всякого $\varepsilon>0$ существуют $N(\varepsilon)<\infty$ и монотонная система открытых множеств $C_N(t), C_N(t)\in U_t$, $C_N(t)\subset C_N(s)$, $t>s$ такие, что:*

а) $D_N(t)$: $\{\omega: y(t,\omega)\in C_N(t)\}\in\mathcal{F}_t$,

б) $\mathbf{P}\{\omega: x(\cdot)_\omega\in C_N(1)\}>1-\varepsilon$,

в) $|\varphi(t,\omega)|<N$, *если* $y(\cdot)_\omega\in C_N(t)$,

г) *если* $x(\cdot)\in C_N(s)$, $x(\cdot)\overline{\in} C_N(t)$, $t>s$,

то найдется τ между s и t такое, что

$$x(\cdot)\in C_N(s), \quad s<\tau \quad x(\cdot)\overline{\in} C_N(\tau).$$

Тогда

$$\int_\Omega \exp\left(\int_0^1 (-\varphi)\right)\mathbf{P}(d\omega)=1.$$

Доказательство. Введем новую функцию $\varphi_N(t,\omega)$, положив

$$\varphi_N(t,\omega)=\begin{cases}\varphi(t,\omega), & \omega\in D_N(t)\\ 0 & \omega\in\Omega\setminus D_N(t)\end{cases}$$

рассмотрим процесс $Y_N = \{y_N(t, \omega), \mathbf{P}\}$

$$y_N(t, \omega) = y(0, \omega) + \int_0^t B(s, y(\cdot)_\omega)\, d\xi(s, \omega) + \int_0^t A(s, y(\cdot)_\omega)\, ds + \\ + \int_0^t B(s, y(\cdot)_\omega)\, \varphi_N(s, \omega)\, ds. \qquad (3.2)$$

аметим, что множество

$$\{\omega: y_N(\cdot)_\omega \in C_N(t)\} = \{\omega: y(\cdot)_\omega \in C_N(t)\} = D_N(t).$$

Действительно, если $y(t, \omega) \in C_N(t)$, то $y_N(s, \omega) = y(s, \omega)$; при всех $s \leqslant t$; если же $y_N(\cdot)_\omega \overline{\in} C_N(t)$, то либо $y(0, \omega) = y_N(0, \omega) \overline{\in} C_N(0)$, либо $y_N(0, \omega) \in C_N(0)$, а тогда в силу z) найдется τ, так что

$$y_N(\cdot)_\omega \in C_N(s), \quad s < \tau, \quad y_N(\cdot)_\omega \overline{\in} C_N(\tau),$$

о в силу построения $y_N(t, \omega)$ мы имеем

$$y_N(s, \omega) = y(s, \omega), \quad s < \tau$$

, следовательно, $y(\cdot)_\omega \overline{\in} C_N(\tau)$, а подавно и $C_N(t)$.

Теперь рассмотрим процесс $\widetilde{Y}_N = \{y_N(t, \omega), \widetilde{\mathbf{P}}_N\}$, где $\widetilde{\mathbf{P}}_N(d\omega) = \exp \int_0^1 \zeta(-\varphi_N)\, \mathbf{P}(d\omega)$. По теореме 1 он удовлетворяет уравнению:

$$y_N(t, \omega) = y(0, \omega) + \int_0^t B(s, y(\cdot)_\omega)\, d\widetilde{\xi}_N(s, \omega) + \int_0^t A(s, y(\cdot)_\omega)\, ds,$$

де

$$\widetilde{\xi}_N(t, \omega) = \xi(t, \omega) - \int_0^t \varphi_N(s, \omega)\, ds.$$

Сравнивая $y_N(t, \omega)$ с (единственным) решением уравнения

$$z(t, \omega) = z(0, \omega) + \int_0^t B(s, z(\cdot)_\omega)\, d\widetilde{\xi}_N(s, \omega) + \int_0^t A(s, z(\cdot)_\omega)\, ds$$

ы видим, что на $D_N(1)$

$$y_N(\cdot)_\omega = y(\cdot)_\omega = z(\cdot)_\omega.$$

Аналогично предыдущему получаем, что

$$\{\omega: z(\cdot)_\omega \in C_N(1)\} = D_N(1).$$

Теперь воспользуемся свойствами $б$)

$$\widetilde{\mathbf{P}}_N\{z(\cdot)_\omega \in C_N(1)\} = \widetilde{\mathbf{P}}_N\{y_N(\cdot)_\omega \in C_N(1)\} = \\ = \int_{D_N(1)} \exp \int_0^1 \zeta(\varphi_N)\, \mathbf{P}(d\omega) = \int_{D_N(1)} \exp \int_0^1 \zeta(\varphi)\, \mathbf{P}(d\omega) > 1 - \varepsilon.$$

Так как это верно при любом ε, то

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{D_N(1)}\exp\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\,\mathbf{P}(d\omega)=1,$$

что доказывает лемму.

Замечание. Примером вектора $\varphi(t,\omega)$, удовлетворяющего условиям леммы, является вектор вида

$$\varphi(t,\omega)=f(t,x(\cdot)_\omega),$$

где $f(t,x(\cdot))$ U_t-измеримый вектор, такой что $|f(t,x(\cdot))|<f_0(|x(\cdot)|)$, где $f_0(s)$, $0\leqslant s<\infty$ — неубывающая функция.

Заметим теперь, что для процессов диффузионного типа с таким $\varphi(t,\omega)$ можно переписать $\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)$ следующим образом:

$$\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)=-\int\limits_0^1 P_k(t,x(\cdot)_\omega)\,dx^k(t,\omega)+\int\limits_0^1 P_k(t,x(\cdot)_\omega)\,A^k(t,x(\cdot)_\omega)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sum_{i=1}^{n}[P_k(t,x(\cdot)_\omega)\,B_i^k(t,x(\cdot)_\omega)]^2\,dt, \tag{3.3}$$

где

$$P_k(t,x(\cdot)_\omega)\,B_i^k(t,x(\cdot)_\omega)=f^i(t,x(\cdot)_\omega)\,\delta_{ij},$$

если эта система разрешима при почти всех (t,ω). Окончательно $\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)=Z(x(\cdot)_\omega)$, где $Z(x(\cdot))$ U-измеримый функционал на C_n. Используя это, нетрудно показать, что для плотности $\mu_{\tilde{x}}$ по μ_x в C_n имеет место формула

$$\frac{d\mu_{\tilde{x}}}{d\mu_x}=\exp[Z(x(\cdot))].$$

Из теоремы 1, леммы 6 и замечания к ней следует

Теорема 2. *Пусть $X=\{x(t,\omega),\mathbf{P}\}$ — процесс диффузионного типа относительно винеровского процесса $\Xi=\{\xi(t,\omega),\mathbf{P},\mathcal{F}_t\}$ с диффузионной матрицей $B(t,x(\cdot))$ и вектором переноса $A(t,x(\cdot))+B(t,x(\cdot))f(t,x(\cdot))$ *.*

Пусть уравнение (3.1) *имеет единственное решение пусть также $|f(t,x(\cdot))|<f_0(\sup|x(\cdot)|)$, где $f_0(s)$ — неубывающая функция вещественного переменного. Тогда $\tilde{X}=\{x(t,\omega),\tilde{\mathbf{P}}\}$, где $\tilde{\mathbf{P}}(d\omega)=\exp[Z(x(\cdot)_\omega)]\,\mathbf{P}(d\omega)$ является процессом, диффузионного типа относительно винеровского процесса $\tilde{\Xi}=\{\tilde{\xi}(t,\omega),\tilde{\mathbf{P}},\mathcal{F}_t\}$ с той же диффузионной матрицей и вектором переноса $A(t,x(\cdot))$, где $\tilde{\xi}(t,\omega)=\xi(t,\omega)-\int\limits_0^t f(s,x(\cdot)_\omega)\,ds$. При этом мер*

* При этом мы, разумеется, предполагаем, что диффузионная матрица и вектор переноса таковы, что выполняются условия (A_0) — (A_2).

в C_n, порожденная процессом $\widetilde{X}$, абсолютно-непрерывна по мере μ_x, по-
жденной процессом X с плотностью

$$\frac{d\mu_{\widetilde{x}}}{d\mu_x} = \exp[Z(x(\cdot))].$$

ля доказательства достаточно заметить, что условиям леммы можно удов-
творить, положив $C_N(t) = \{x(\cdot)\colon \sup|x(s)| < N'\}$, где N' выбрано так,
о $f_0(N') < N$.

Все остальное немедленно следует из теоремы 1 и замечания к лемме 6.

Этот результат известен, когда $\widetilde{X}$ оказывается винеровским процессом
]; в более общем случае эти вопросы рассматривались в [6], но при
ожных ограничениях. В недавно опубликованной работе Скорохода [10]
алогичные результаты получены для процессов с независимыми прираще-
ями.

Основную роль в доказательствах этого параграфа играет предположе-
е о единственности решения уравнения (3.1). Оно легко доказывается,
ли $B(t, x(\cdot))$ и $A(t, x(\cdot))$ удовлетворяет условиям Липшица по $x(\cdot)$ рав-
мерно по t (доказательство совершенно аналогично доказательствам К. Ито
И. И. Гихмана). В случае диффузионных марковских процессов, рас-
отренных К. Ито [3], это ограничение может быть несколько ослабле-
. Для однородных по времени процессов ($B(t, x(\cdot))$ и $A(t, x(\cdot))$ не зави-
т от t) достаточно потребовать от коэффициентов непрерывности с усло-
ем Гельдера, невырожденности B_j^i и выполнения неравенства:

$$\sum_{i,\,j} B_j^i(x)^2 + A^i(x)^2 < c(1+|x|)^2.$$

Изложение этих вопросов, а также некоторых свойств процессов диф-
зионного типа будет дано в одной из следующих статей автора.

Поступила в редакцию
5.7.58

ЛИТЕРАТУРА

1] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы и полугруппы операторов, Теория вероят. и ее примен., **I**, 1 (1956), 25—37.
2] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., 1956 (J. L. Doob. Stochastic processes, New York, London, 1953).
3] K. Ito, On a stochastic differential equations, Memoires Amer. Math. Soc., 4 (1951) (Есть русский перевод, см. сборник Математика I : I (1957), 78—116).
4] K. Ito, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Mathem. Journal v. 3, 1951.
5] И. И. Гихман, К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, Укр. Матем. журнал, 2 (1950), 37—63; 3 (1951), 317—339.
6] A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Theorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
7] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., **I**, 2 (1956), 117—238.
8] G. Maruyama, Continuous Markov process and stochastic equations., Rend. Circolo Math. Palermo, **4** (1955), 1—43.
9] P. Levy, Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris, 1948.
0] А. В. Скороход, О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, I; Процессы с независимыми приращениями, Теория вероят. и ее примен., **II**, 4 (1957), 417—447.

ON TRANSFORMING A CERTAIN CLASS OF STOCHASTIC PROCESSES BY ABSOLUTELY CONTINUOUS SUBSTITUTION OF MEASURES

I. V. GIRSANOV (MOSCOW)

(*Summary*)

Let $X\{x(t, \omega), \mathbf{P}\}$ be a stochastic process in n-dimensional Euclidian space R_n having continuous trajectories, which satisfy the stochastic equation:

$$x^i(t, \omega) = x^i(0, \omega) + \int_0^t \Phi_j^i(s, \omega)\, d\xi^j(s, \omega) + \int_0^t \Psi^i(s, \omega)\, ds, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Here $p = p(d\omega)$ is a measure in space of Ω elementary events, $\int_0^t \Phi_j^i d\xi^j$ is considered to be the stochastic integral of K. Ito with respect to the Wiener process ξ. The process is called a Wiener process if it satisfies conditions (1.1) and (1.2) of this paper. Process X is called an K. Ito process (with respect to Wiener process ξ) corresponding to the diffusion matrix $\Phi(t, \omega) = \| \Phi_j^i(t, \omega) \|$ and to the translation vector $\Psi(t, \omega) = \{\Psi^i(t, \omega)\}$.

It is proved with certain restriction imposed on the vector $\varphi(t, \omega) = \{\varphi^i(t, \omega)\}$ that process $\widetilde{X} = \{x(t, \omega), \widetilde{\mathbf{P}}\}$, where

$$\widetilde{\mathbf{P}}(d\omega) = \exp\left[\int_0^1 \varphi^i(t, \omega)\, \delta_{ij} d\xi^j(t, \omega) - \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_1^n (\varphi^i(t, \omega)^2\, dt\right] \mathbf{P}(d\omega)$$

is also an K. Ito process (having a matrix $\Phi(t, \omega)$ and a translation vector $\widetilde{\Psi}(t, \omega) = \Psi(t, \omega) + \Phi(t, \omega) \cdot \varphi(t, \omega)$), with respest to the Wiener process:

$$\widetilde{\xi}(t, \omega) = \xi(t, \omega) - \int_0^t \varphi(s, \omega)\, ds.$$

This is proved by deriving several relationships for conditional assembly averages with respect to measure $\widetilde{\mathbf{P}}$ making use of transformation formulas for stochastic integrals.

From the results obtained it follows, in particular, that the measures are absolutely continuous in the space of trajectories for diffusive Markov processes determined by the stochastic equations of K. Ito [3] if they have identical diffusion matrixes and different translation matrixes.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1960

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

BOUNDS FOR THE MOMENTS OF LINEAR AND QUADRATIC FORMS IN INDEPENDENT VARIABLES

P. WHITTLE

1. Our aim is to obtain bounds for the absolute s-th moments (where s is not ecessarily integral) of quadratic and linear forms in independent statistical variables. ese results will be applied in a later paper on the normal convergence of quadratic forms.

Our first result is a sharp one for a particular linear form.

Theorem 1. *Let the variables $z_1, z_2 \dots z_n$ be statistically independent, and each sume the values ± 1 with respective probabilities $1, 2$. Then, for any set of real coefficients b_j,*

$$\mathbf{E} \mid b_j z_j \mid^s \leqslant C(s, n) \left(\sum_j b_j^2 \right)^{s/2}, \quad (s \geqslant 2) \tag{1}$$

here

$$C(s, n) = 2^{-n} n^{-s/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mid n - 2k \mid^s \leqslant \tag{2}$$

$$\leqslant C(s) = \frac{2^{s/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2} \right). \tag{3}$$

he equality sign holds in (1) if $s = 2$ or if all the b_j have equal modulus, but not herwise.

he second result concerns the moments of the real forms

$$\mathbf{A} = x' \mathbf{A} x = \sum_j \sum_k a_{jk} x_j x_k, \tag{4}$$

$$\mathbf{B} = x' \mathbf{B} = \sum_j b_j x_j, \tag{5}$$

here the variables $x_1, x_2 \dots x_n$ are assumed to be statistically independent and to have ero mean values, but not necessarily to be distributed identically. We shall write

$$\gamma_j(s) = [\mathbf{E} \mid x_j \mid^s]^{1/s} \tag{6}$$

the case where these quantities exist.

Theorem 2. *The following inequalities are valid*

$$\mathbf{E} \mid \mathbf{B} \mid^s \leqslant 2^s C(s) \left(\sum_j b_j^2 \gamma_j^2(s) \right)^{s/2}, \tag{7}$$

$$\mathbf{E} \mid \mathbf{A} - \mathbf{E}(\mathbf{A}) \mid^s \leqslant 2^{3s} C(s) [C(2s)]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j \sum_k a_{jk}^2 \gamma_j^2(2s) \gamma_k^2(2s) \right)^{s/2} \tag{8}$$

ovided $s \geqslant 2$ and the right-hand members exist. If all the x_j have symmetric distributions, en the right-hand members may be divided by 2^s.

2. Proof of Theorem 1.

Lemma 1. *For any real quantity f. The function*

$$\Phi(x) = \Psi(\sqrt{x}) = |f+\sqrt{x}|^s + |f-\sqrt{x}|^s, \tag{9}$$

defined for $x \geqslant 0$, is convex if $s \geqslant 2$.

The function Φ and its first two derivatives exist and are continuous. We have

$$\Phi''(x) = \frac{s(s-1)}{2x}\left[\frac{P^{s-2}+Q^{s-2}}{2} - \frac{P^{s-1}\pm Q^{s-1}}{(s-1)(P\pm Q)}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{s(s-1)}{2x}\left[\frac{P^{s-2}+Q^{s-2}}{2} - \frac{P^{s-1}-Q^{s-1}}{(s-1)(P-Q)}\right], \tag{10}$$

where

$$P = |f| + \sqrt{x}, \tag{11}$$

$$Q = ||f| - \sqrt{x}| \tag{12}$$

and the variable sign in the middle member of (10) is taken as $\pm$ accordings as $x \gtrless f^2$. Now, inequality (10) may be written

$$\Phi''(x) \geqslant \frac{s(s-1)}{2x}\left[\frac{P^{s-2}+Q^{s-2}}{2} - \frac{1}{P-Q}\int_Q^P y^{s-2}dy\right]. \tag{13}$$

But the right-hand member of this relation is non-negative, because y^{s-2} is a convex function of y if $y \geqslant 0$ and $s \geqslant 2$. This proves that Φ is convex, and, in fact, is strictly convex if $s > 2$.

Lemma 2. *For any three real quantities f, τ_1, τ_2*

$$|f+\tau_1+\tau_2|^s + |f-\tau_1-\tau_2|^s + |f+\tau_1-\tau_2|^s + |f-\tau_1+\tau_2|^s \leqslant$$

$$\leqslant 2|f|^s + |f-\sqrt{2(\tau_1^2+\tau_2^2)}|^s + |f+\sqrt{2(\tau_1^2+\tau_2^2)}|^s \tag{14}$$

provided $s \geqslant 2$.

Since $\Phi(x) = \Psi(\sqrt{x})$ is convex, we have

$$\Psi(\sqrt{px^2+qy^2}) \leqslant p\Psi(x) + q\Psi(y), \tag{15}$$

where the quantities p, q, x, y are non-negative, and $p+q=1$. Setting $x=0$, $y=\sqrt{u^2+v^2}$, $p=\frac{v^2}{u^2+v^2}$, $q=\frac{u^2}{u^2+v^2}$ we find that (15) becomes

$$\Psi(u) \leqslant \frac{v^2\Psi(0) + u^2\Psi(\sqrt{u^2+v^2})}{u^2+v^2}. \tag{16}$$

Adding this inequality to the one derived from it by an interchange of u and v, we obtain

$$\Psi(u) + \Psi(v) \leqslant \Psi(0) + \Psi(\sqrt{u^2+v^2}). \tag{17}$$

Relation (14) then follows from (17) if we make the substitutions

$$u = |\tau_1+\tau_2|, \quad v = |\tau_1-\tau_2|. \tag{18}$$

Again, the equality sign can hold in (14) only if either $s=2$, or if $|\tau_1| = |\tau_2|$.

The way to the proof of Theorem 1 is now clear. It is obviously no restriction of generality to assume that all the b_j are non-negative. Let us set

$$\tau_j = \frac{b_j}{\sqrt{\sum_j b_j^2}}, \tag{19}$$

that $\sum \tau_j^2 = 1$, and assume, for the sake of argument, that τ_1 and τ_2 are the greatest and the least of the τ_j. Then

$$\frac{\mathrm{E}\left|\sum_j b_j z_j\right|^s}{\left(\sum_j b_j^2\right)^{s/2}} = \mathrm{E}\left|\sum_j \tau_j z_j\right|^s =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum [|f+\tau_1+\tau_2|^s + |f-\tau_1+\tau_2|^s + |f+\tau_1-\tau_2|^s + |f-\tau_1-\tau_2|^s], \qquad (20)$$

where f denotes the value of $\sum_3^n \tau_j z_j$ for a particular choice of $z_3 \ldots z_n$, and the summation indicated covers the values of $z_3 \ldots z_n$. Let us now replace τ_1 and τ_2 by the common value $\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)/2}$. The value of $\sum_1^n \tau_j^2$ is unaltered, but, by Lemma 2, we see that expression (20) will not be decreased. By repeating this procedure we ultimately make all the τ_j equal, the common value being $\frac{1}{\sqrt{n}}$, and show that $\mathrm{E}\left|\sum_j \tau_j z_j\right|^s$ attains its maximum value in this case. Relation (4) is thus proved, since $\mathrm{E}\, n^{-s/2}\left|\sum_j z_j\right|^s$ obviously has the value indicated by (2). To prove (3), we note that $C(s, n)$ must be a non-decreasing function of n, since the case of n variables can be regarded as a special case of the $(n+1)$ variable situation, in which b_{n+1} is zero, so that equality of the coefficients has been attained.

We thus have

$$C(s, n) \leqslant \lim_{n\to\infty} C(s, n) = \frac{2^{s/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |x|^s\, ds = \frac{2^{s/2}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \qquad (21)$$

in agreement with (3).

3. Some Auxiliary Results

Lemma 3. *For any finite set of variables* ζ_j

$$\mathrm{E}\left|\sum_j \zeta_j\right|^s \leqslant \left[\sum_j (\mathrm{E}\,|\zeta_j|^s)^{1/s}\right]^s \qquad (22)$$

provided $s \geqslant 1$, *and the right-hand member exists.*

This result is an immediate consequence of Minkowski's inequality in its integral form

Lemma 4. *If the variables* X, Y *have zero mean values, and are independently and similarly distributed, then*

$$\mathrm{E}\,|X|^s \leqslant \mathrm{E}\,|X-Y|^s \qquad (23)$$

provided $s \geqslant 2$, *and the left-hand member exists.*

Proof: Denote the distribution function of X by $F(X)$. If $s \geqslant 2$ and $|X|$ possesses s-th moment then the following partial Taylor expansion is valid:

$$\int |X-Y|^s dF(X) = \int |X|^s dF(X) + sY\left(\int_{-\infty}^{0} - \int_{0}^{+\infty}\right)|X|^{s-1} dF(X) +$$

$$+ \frac{s(s-1)}{2} Y^2 \int |X-\theta Y|^{s-2} dF(X). \qquad (24)$$

Here $\theta = \theta(X, Y)$ is a quantity lying between 0 and 1. Averaging relation (8) with respect to Y we find

$$\mathbf{E}\,|X-Y|^s - \mathbf{E}\,|X|^s = \frac{s(s-1)}{2}\,\mathbf{E}\,|X-\theta Y|^{s-2} \geqslant 0, \tag{25}$$

as claimed.

4. The Linear Case. Consider first the case where the x_j are all symmetrically distributed, and let $\underset{\pm}{\mathbf{E}}$ denote an expectation with respect to the signs of the x_j, the moduli being held constant. Then, provided $s \geqslant 2$, successive application of Theorem 1 and Lemma 3 yields

$$\mathbf{E}\left|\sum b_j x_j\right|^s = \mathbf{E}\underset{\pm}{\mathbf{E}}\left|\sum_j b_j x_j\right|^s \leqslant \mathbf{E}\,C(s)\left(\sum_j b_j^2 x_j^2\right)^{s/2} \leqslant C(s)\left(\sum_j b_j^2\gamma_j^2(s)\right)^{s/2}. \tag{26}$$

For the case of asymmetric x_j distributions we note that, by Lemma 4,

$$\mathbf{E}\left|\sum_j b_j x_j\right|^s \leqslant \mathbf{E}\left|\sum_j b_j(x_j - y_j)\right|^s, \quad (s \geqslant 2) \tag{27}$$

where the y vector is distributed independently of, but similarly to the x vector. The variables $x_j - y_j$ are symmetrically distributed, and

$$\mathbf{E}\,|x_j - y_j|^s \leqslant (2\gamma_j(s))^2. \tag{28}$$

The relation (7) then follows if inequality (26) is written out for the form $\sum_j b_j(x_j - y_j)$ and note taken of (27), (28).

5. The Quadratic Case. We shall use the fact that, by Lemma 4

$$\mathbf{E}\,|\mathbf{A} - \mathbf{E}(\mathbf{A})|^s \leqslant \mathbf{E}\,|\mathbf{D}|^s, \tag{29}$$

where

$$\mathbf{D} = x'\mathbf{A}x - y'\mathbf{A}y = (x+y)'\mathbf{A}(x-y) = \xi'\eta \tag{30}$$

say, and

$$\xi_j = \sum_k a_{jk}(x_k + y_k), \tag{31}$$

$$\eta_j = x_j - y_j. \tag{32}$$

Now, the distribution of the η_j conditional on the values of the ξ_j is symmetric, so that by Theorem 1,

$$\underset{\pm}{\mathbf{E}}\,|\mathbf{D}|^s \leqslant C(s)\left(\sum \xi_j^2\eta_j^2\right)^{s/2}, \quad (s \geqslant 2) \tag{33}$$

where $\underset{\pm}{\mathbf{E}}$ denotes expectation with respect to the signs of the η_j. For any $s \geqslant 2$ we have, hen (by (22))

$$\mathbf{E}\,|\mathbf{D}|^s \leqslant C(s)\,\mathbf{E}\left(\sum \xi_j^2\eta_j^2\right)^{s/2} \leqslant C(s)\left[\sum_j (\mathbf{E}\,|\xi_j\eta_j|^s)^{2/s}\right]^{s/2} \leqslant$$

$$\leqslant C(s)\left[\sum_j (\mathbf{E}\,|\xi_j|^{2s})^{1/s}\,(\mathbf{E}\,|\eta_j|^{2s})^{1/s}\right]^{s/2}. \tag{34}$$

Now

$$\mathbf{E}\,|\eta_j|^{2s} \leqslant (2\gamma_j(2s))^{2s}; \tag{35}$$

$$\mathbf{E}\,|\xi_j|^{2s} \leqslant 2^{2s}\,\mathbf{E}\left|\sum_k a_{jk}x_k\right|^{2s} \leqslant 2^{4s}\,C(2s)\left(\sum_k a_{jk}^2\gamma_k^2(2s)\right)^s. \tag{36}$$

Inserting these bounds in relation (34), we obtain the desired result, (8).

Applied Mathematics
Laboratory, New Zealand P.S.J.R.

Поступила в редакцию
2.9.59

ОЦЕНКИ МОМЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

П. УИТТЛ (КЭМБРИДЖ)

(*Резюме*)

Для абсолютных центральных моментов произвольного порядка $s \geqslant 2$ линейных и квадратичных форм независимых случайных величин устанавливаются достигающиеся оценки в терминах абсолютных моментов слагаемых.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И СТАЦИОНАРНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Я. Г. СИНАЙ

Тот факт, что общая теория стационарных в узком смысле случайных процессов может рассматриваться как часть метрической теории динамических систем, т. е. теории, изучающей свойства групп преобразований с инвариантной мерой, хорошо известен. Обратное утверждение состоит в том, что всякой динамической системе отвечает целый класс стационарных случайных процессов (см. ниже).

Настоящая работа посвящена тому, какие общие следствия для метрической теории динамических систем вытекают из некоторых привычных в теории вероятностей свойств стационарных процессов, порождаемых заданной динамической системой.

Мы считаем известными понятие и свойства пространства Лебега (см. [3], [4]). Пусть в пространстве Лебега Ω с мерой μ, определенной на σ-алгебре ε измеримых подмножеств Ω, задана динамическая система, т. е. однопараметрическая группа $\{s^t\}$ взаимно однозначных сохраняющих меру преобразований Ω в себя. Если t пробегает все действительные значения, то динамическая система называется потоком. На протяжении всей работы рассматриваются только измеримые потоки. Это означает (см. [3]), что для любого измеримого множества A пространства Ω совокупность пар (ω, t) таких, что $s^t \omega \in A$, измерима в прямом произведении $\Omega \times (t)$.

Если ξ — замкнутая σ-подалгебра σ-алгебры ε, то пространство функций, заданных на Ω и измеримых относительно ξ, с конечным интегралом квадрата модуля будет обозначаться через $L^2_\mu(\xi)$. Если σ-подалгебра ξ инвариантна относительно потока $\{s^t\}$, т. е. для любого $A \in \xi$ и всех t множество $s^t A \in \xi$, то в пространстве $L^2_\mu(\xi)$ группа $\{s^t\}$ индуцирует однопараметрическую группу $\{u^t\}$ унитарных операторов по формуле

$$u^t f(\omega) = f(s^t \omega).$$

I. Пусть $f(\omega)$ — случайная величина, т. е. измеримая функция на пространстве Ω, принимающая действительные или комплексные значения. Семейство случайных величин $f_t(\omega) = f(s^t\omega)$ образует вероятностный процесс, если его конечномерные распределения определить следующим естественным образом:

$$P\{f_{t_1}(\omega) \in \Gamma_1, \quad f_{t_2}(\omega) \in \Gamma_2, \ \ldots, \ f_{t_k}(\omega) \in \Gamma_k\} = \mu\{\bigcap_{i=1}^{k} (\omega : f(s^{t_i}\omega) \in \Gamma_i)\}.$$

Из того, что поток $\{s^t\}$ сохраняет меру, вытекает, что получившийся процесс будет стационарным. Условие измеримости потока $\{s^t\}$ обеспечивает измеримость процесса $f_t(\omega)$.

Рассмотрим замкнутую σ-подалгебру ζ^0, порожденную лебеговскими множествами случайных величин $f_t(\omega)$, $t \leqslant 0$. Как известно, в пространстве Лебега каждой σ-подалгебре ξ можно сопоставить измеримое разбиение (см. [4]), причем два измеримых разбиения, отвечающих одной и той же σ-алгебре ξ, совпадают между собой по mod 0. Делается

это следующим образом. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ — базис σ-алгебры ξ. Рассмотрим измеримое разбиение α_1, порожденное множествами $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$. Покажем, что если $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots$ — другой базис σ-алгебры ξ, то измеримое разбиение α_2, им порождаемое, совпадает по mod 0 с α_1. По теореме Рохлина (см. [4], стр. 130) фактор-пространство $\Omega \mid \alpha_1$ является пространством Лебега и ξ есть σ-алгебра его измеримых множеств. По теореме Рохлина о базисах (см. [4], стр. 115) фактор-пространство $\Omega \mid \alpha_1$ полно по mod 0 относительно базиса $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots$. Но это и означает, что разбиение α_2 тождественно по mod 0 с разбиением α_1. Возвращаясь к σ-алгебре ζ^0, зафиксируем какое-либо измеримое разбиение, отвечающее ей, которое мы будем обозначать той же буквой ξ^0. Тогда в фактор-пространстве $\Omega \mid \zeta^0$ можно естественно определить стационарный марковский процесс. Для этого воспользуемся тем, что почти каждый элемент C разбиения ζ^0 можно превратить в пространство Лебега, задав в нем некоторую меру $\mu(\cdot \mid C)$ со следующими свойствами: для любого $A \in \varepsilon$ а) множество $A \cap C$ измеримо в C для почти всех C; б) $\mu(A \cap C \mid C) = \mu(A \mid C)$ измерима на фактор-пространстве $\Omega \mid \zeta^0$, в) $\mu(A) = \int\limits_{\Omega \mid \zeta_0} \mu(A \mid C)\, d\mu$. В общей теории измеримых разбиений система мер $\mu(\cdot \mid C)$ называется канонической системой мер. В теории вероятностей ей соответствует понятие условных вероятностей относительно заданной σ-алгебры. Положим для произвольных $A \in \zeta^0$, $t > 0$ и C

$$P(A;\ t;\ C) = \mu(S^t A \mid C)$$

для тех C, где эта функция определена, и 0 — для остальных C. Из приведенных свойств канонической системы мер легко следует, что: а) при фиксированном t для почти всех C функция $P(\cdot, t;\ C)$ есть мера; б) при фиксированном t и A она измерима на фактор-пространстве $\Omega \mid \zeta^0$. Докажем, что при почти всех элементах $\widetilde{C}$ разбиения ζ^0 она удовлетворяет уравнению Колмогорова

$$P(A,\ t + t_1;\ \widetilde{C}) = \int\limits_{\Omega \mid \zeta^0} P(A,\ t_1;\ C)\, P(dC,\ t;\ \widetilde{C}).$$

Предварительно заметим, что для любого $t > 0$ σ-алгебра $\zeta^{-t} = s^{-t}\zeta^0$ является σ-подалгеброй σ-алгебры ζ^0 и измеримое разбиение, соответствующее ей, можно получить путем применения преобразования s^{-t} к каждому элементу разбиения ζ^0. Если положить для $A \in \varepsilon$ и тех элементов C^{-t} разбиения ζ^{-t}, для которых элемент $s^t C^{-t}$ разбиения ζ^0 является пространством Лебега

$$\mu(A \mid C^{-t}) = \mu(s^t A \mid s^t C^{-t}),$$

то система мер $\mu(\cdot \mid C^{-t})$ будет канонической системой мер разбиения ζ^{-t}. Поэтому для любого $A \in \xi^0$ и почти всех $\widetilde{C}$

$$P(A,\ t + t_1;\ \widetilde{C}) = \mu(s^{t+t_1} A \mid \widetilde{C}) = \mu(s^t A \mid s^{-t_1}\widetilde{C}).$$

Далее, в силу неравенства, справедливого при $t > 0$, $\zeta^0 \supset \zeta^{-t}$ для любого $A \in \varepsilon$ почти всюду

$$\mu(A \mid C \mid C^{-t}) = \mu(A \mid C)$$

и поэтому

$$P(A,\ t + t_1,\ \widetilde{C}) = \mu(s^t A \mid s^{-t_1}\widetilde{C}) = \int\limits_{\Omega \mid \zeta^0} \mu(s^t A \mid C \mid s^{-t_1}\widetilde{C})\, \mu(dC \mid s^{-t_1}\widetilde{C}) =$$

$$= \int\limits_{\Omega \mid \zeta_0} \mu(s^t A \mid C)\, \mu(d(s^{t_1} C) \mid \widetilde{C}) = \int\limits_{\Omega \mid \zeta^0} P(A,\ t;\ C)\, P(dC,\ t_1;\ \widetilde{C}),$$

что и требовалось доказать. Если начальное распределение задать с помощью формулы

$$P(A) = \mu(A)$$

и $A \in \zeta_0$, то получившийся марковский процесс будет стационарным. Доказательство
го простого факта мы опускаем.

II. Для многих приложений теории динамических систем важны случаи, когда среди
лучающихся таким образом марковских процессов имеются процессы чисто случайные,
етерминированные. Отсутствие детерминированности формально можно выразить, либо
ребовав, чтобы вероятности перехода $P(A, t; C)$ не были сосредоточены почти всюду
одной точке, либо потребовав строгого включения для σ-алгебр $\zeta^t = s^t \zeta_0$:

$$\zeta^t \supset \zeta_0$$

и $t > 0$. Второй способ предпочтительнее, так как не требует предварительной редукции
марковским процессам.

Итак, предположим, что для измеримого потока $\{s^t\}$ существует σ-подалгебра ζ_0
лгебры ε такая, что $s^t \zeta_0 = \zeta^t \supset \zeta^{t_1}$ при $t > t_1$. Положим $\zeta = \bigvee_{-\infty}^{\infty} \zeta^t$ и рассмотрим σ-под-
ебру $\underline{\zeta} = \bigwedge_{-\infty}^{\infty} \zeta^t$, состоящую из измеримых множеств, принадлежащих всем σ-подалге-
м ζ^t.

Теорема 1. *Подпространство* $\overline{H} = L^2_\mu(\xi) \ominus L^2_\mu(\underline{\zeta})$ *гильбертова пространства* $L^2_\mu(\varepsilon)$
вариантно относительно группы унитарных операторов $\{U^t\}$, *действующей в* $L^2_\mu(\varepsilon)$,
группа $\{U^t\}$ *имеет в* $\overline{H}$ *счетнократный лебеговский спектр.*

Теорема 2. *Пусть множества* $A_0, A_1, \ldots, A_k$, *принадлежащие* σ-*алгебре* ξ, *удовле-*
воряют условиям:

а) $0 < \mu(A_i) < 1$

б) *множества* $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *не зависят от* σ-*алгебры* $\underline{\zeta}$, *т. е.* $\mu(A_i \mid \underline{C}) = \mu(A_i)$
на почти всех элементах $\underline{C}$ *разбиения* $\underline{\zeta}$, *соответствующего* σ-*алгебре* ξ, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Тогда для любой последовательности $(k+1)$-*мерных векторов* $\vec{t}^n = \{t_0^n, t_1^n, \ldots, t_k^n\}$
таких, что $t_0^n < t_1^n < \ldots < t_k^n$ *и* $\min_i (t_i^n - t_{i-1}^n) \to \infty$ при $n \to \infty$

$$\mu\{s^{t_0^n} A_0 \cap s^{t_1^n} A_1 \cap \ldots \cap s^{t_k^n} A_k\} \to \mu\{A_0\}\,\mu(A_1) \ldots \mu\{A_k\}.$$

III. Определим динамические системы (потоки) Колмогорова требованиями:

а) $\bigvee_{-\infty}^{\infty} \zeta^t = \zeta$

б) $\underline{\zeta} = \nu$, где ν состоит из множеств, имеющих меру нуль или единица.

В таком случае $L^2_\mu(\underline{\zeta})$ представляет собой одномерное пространство функций, посто-
ных почти всюду на Ω, и теоремы 1 и 2 переформулируются следующим образом.

Теорема 1′. *Группа* $\{U^t\}$ *унитарных операторов, соответствующих потоку Колмо-*
рова, имеет в ортогональном дополнении к подпространству постоянных счетнократ-
ый лебеговский спектр.

Теорема 2′. *Для любых* $(k+1)$ *измеримых множеств* $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *и последова-*
льности $(k+1)$-*мерных векторов* $\vec{t}^n = \{t_0^n, t_1^n, \ldots, t_k^n\}$ *таких, что* $t_0^n < t_1^n < \ldots < t_k^n$,
$\min_i (t_i^n - t_{i-1}^n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$

$$\mu\{s^{t_0^n} A_0 \cap s^{t_1^n} A_1 \cap \ldots \cap s^{t_k^n}) \to \mu\{A_0\}\,\mu\{A_1\} \ldots \mu\{A_k\}.$$

IV. По поводу теорем 1 и 1′ заметим, что из результатов Плеснера [2] можно выве-
(см. также замечание в работе [1] А. Н. Колмогорова), что группы $\{U^t\}$ имеют в
азанных подпространствах однородной лебеговский спектр. Гипотеза о том, что в рас-
атриваемой обстановке его кратность всегда бесконечна, принадлежит А. Н. Колмогорову;
ыла ранее подтверждена в некоторых частных случаях [5], [6].

При доказательстве теорем 1 и 1′ использованы теоремы о специальных представл ниях измеримых потоков (по поводу обозначений и основных фактов, касающихся спец альных представлений, см. [3], § 6). Следующая лемма может иметь самостоятельно значение.

Лемма. *Пусть специальный поток* $\{S^t\}$, *построенный по автоморфизму* T *простра ства* Y *и функции* $F(y)$ *таков, что*

а) *в пространстве* Y *существует* σ-*алгебра* ζ_y^0, *для которой*

$$T\zeta_y^0 = \xi_y' \supset \zeta_y^0;$$

б) *функция* $F(y)$ *измерима относительно* σ-*алгебры* ξ_y^0.

Тогда в $L_\mu^2(\varepsilon)$ *существует инвариантное подпространство, в котором группа* $\{U$ *имеет счетнократный лебеговский спектр.*

Поступила в редакцию
16.2.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Новый метрический инвариант транзитивных динамически систем и автоморфизмов пространств Лебега, ДАН СССР, **119**, 5 (1957).
[2] А. И. Плеснер, Функции максимального оператора, ДАН СССР, **23**, 4 (1939) О полуунитарных операторах, ДАН СССР, **25**, 9 (1939).
[3] В. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систе УМН, **IV**, 2 (1949).
[4] В. А. Рохлин, Об основных понятиях теории меры, Матем. сб., **25 : 1** (1949).
[5] Я. Г. Синай, О потоках с конечной энтропией, ДАН СССР, **125**, 6 (1959).
[6] K. Ito, Spectral type of the shift transformation of differential processes with st tionary increments, Transactions of the Amer. Math. Soc., **81**, 2 (1956), 253.

DYNAMICAL SYSTEMS AND STATIONARY MARKOV PROCESSES

Ya. G. SINAY (MOSCOW)

(Summary)

This paper is devoted to some properties of dynamical systems, concerned stationar processes with regular component. These properties relate to spectra of such dynamica systems and some qualities of mixing.

О ВЕРОЯТНОСТЯХ КРАЙНИХ ЗНАЧЕНИЙ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

И. С. ВОЛКОВ

§ 1. Постановка задачи

Пусть $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ — множество возможных состояний простой однородной цеп Маркова; $e(k)$ — состояние цепи в момент времени k ($k = 0, 1, 2, \ldots$); $P = \| p_{ij} \|$ — ма рица переходных вероятностей. Зададим на состояниях $e(k)$ однозначную функцию $f(e(k))$

$$f(e(k)) = s_l, \text{ если } e(k) = E_l, \ k \geqslant 0,$$

где s_l целые неотрицательные числа, не зависящие от k, и обозначим через $P_{qj}(n,$

ероятность $\mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n} f(e(k)) = s, e(n) = E_j \mid e(0) = E_q\right\}$. Будем придерживаться следующих ределений ([1], [2], [3]): последовательность состояний

$$(E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_l}) \tag{1.1}$$

ывается *цепочкой*, если $p_{i_j i_{j+1}} > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant l-1)$;

$f(E_{i_1}) + f(E_{i_2}) + \ldots + f(E_{i_l})$ — вес цепочки (1.1); l — длина цепочки (1.1); цепочка (1.1) называется *циклом*, если $p_{i_l i_1} > 0$;

$f(E_{i_1}) + f(E_{i_2}) + \ldots + f(E_{i_l})]$ — удельный вес цикла (1.1); δ и Δ, соответственно, — наименьший и наибольший из удельных весов тех циклов (1.1), для которых выполняются условия:

а) E_{i_1} достижимо из E_q,

б) E_j достижимо из E_{i_1},

в) все состояния $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_l}$ различны.

Будем в дальнейшем рассматривать лишь те циклы, которые удовлетворяют требованиям а и б); циклы с удельным весом δ будем называть минимальными, а с удельным весом Δ — максимальными.

Для последовательности случайных величин $\left\{\sum_{k=0}^{n} f(e(k))\right\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ значения $n\delta + \gamma$, $n\Delta + \gamma$ $(\gamma = \text{const})$ являются крайними в том смысле, что, с одной стороны, при всех достаточно больших Γ тождественно по n выполняется:

$$P_{qj}(n, n\delta - \Gamma) = 0; \quad P_{qj}(n, n\Delta + \Gamma) = 0$$

в то же время, как это следует из определения δ и Δ, существуют такие постоянные Γ_1, Γ_2, при которых имеют место неравенства:

$$\limsup_{n\to\infty} P_{qj}(n, n\delta + \Gamma_1) > 0; \quad \limsup_{n\to\infty} P_{qj}(n, n\Delta + \Gamma_2) > 0.$$

В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $n \to \infty$ вероятностей $P_{qj}(n, n\delta + \gamma)$, $P_{qj}(n, n\Delta + \gamma)$ (γ — произвольное, но фиксированное число). Устанавливается, что величина $P_{qj}(n, n\delta + \gamma)$ представима в виде суммы конечного, не зависящего от n числа компонент $P_\beta^{(n)}(l_\beta)$, обладающих следующими свойствами:

а) если $n \not\equiv l_\beta \pmod{J_\beta(l_\beta)}$, то $P_\beta^{(n)}(l_\beta) = 0$,

б) если $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$ по закону

$n \equiv \nu + l_\beta \pmod{J_\beta(l_\beta)}$, $\nu \equiv 0 \pmod{J_\beta(l)}$, то отношение $\dfrac{P_\beta^{(n_i)}(l_\beta)}{n_i^{R_\beta(l_\beta)-1}\,\Lambda_\beta^{n_i}(l_\beta)}$ стремится к конечному пределу $\Pi_\beta^{(\nu)}(l_\beta)$, большему нуля.

Полное определение всех приведенных выше величин требует ряда предварительных рассмотрений. Отметим здесь лишь, что основой для выделения компонент $P_\beta^{(n)}(l_\beta)$ является возможность разбиения множества всех цепочек длины $n+1$, веса $n\delta + \gamma$ на непересекающиеся пучки траекторий с соблюдением правила: траектории одного пучка должны получаться из фиксированной цепочки добавлением в определенных местах минимальных циклов.

В работе доказывается, что точное выражение для $P_{qj}(n, n\delta + \gamma)$ имеет вид суммы конечного, не зависящего от n числа членов $a_k n^{R_k} \lambda_k^n$; значения постоянных a_k, R_k, λ_k находятся методом производящих функций.

Аналогичные результаты для $P_{qj}(n, \Delta \cdot n + \gamma)$ могут быть получены из сформулированных выше утверждений, если воспользоваться формулой

$$P_{qj}(n, \Delta n + \gamma) = P\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} s_i - f(e(k))\right] = \right.$$

$$\left. = \left(\sum_{i=1}^{m} s_i - \Delta\right) \cdot n + \sum_{i=1}^{m} s_i - \gamma;\ e(n) = E_j \mid e(0) = E_q\right\},$$

заметив, что циклы цепи, являющиеся максимальными при данных значениях s_i, оказываются минимальными при переходе от s_i к $\tilde{s}_i = \sum_{k=1}^{m} s_k - s_i$.

Автор признателен А. Н. Колмогорову и Б. А. Севастьянову за ценные указания.

§ 2. Строение цепочек длины $n+1$, веса $\delta n + \gamma$

1°. Зададим отображение $\mathfrak{Q}$ множества всех цепочек конечной длины в себя следующим образом: в произвольно выбранной цепочке (1.1) отметим все повторения начального состояния (в данном случае E_{i_1}), — пусть они наблюдаются на $k_1, k_2, \ldots, k_t$ местах; среди циклов

$$(E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_s});\ s = k_1 - 1,\ k_2 - 1, \ldots, k_t - 1 \qquad (2.1)$$

выделим наиболее длинный минимальный цикл — скажем, $(E_{i_1} \ldots E_{i_{\sigma-1}})$ — и удалим его из цепочки (1.1); при этом снова получится некоторая цепочка, а именно $(E_{i_1}, E_{i_\sigma}, E_{i_{\sigma+1}} \ldots E_{i_l})$. По определению,

$$\mathfrak{Q}(E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_l}) = (E_{i_1} E_{i_\sigma} E_{i_{\sigma+1}} \ldots E_{i_l}).$$

Если среди циклов (2.1) нет минимальных (в частности, если повторений состояния E_{i_1} вообще нет), то

$$\mathfrak{Q}(E_{i_1} \ldots E_{i_l}) = (E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_l}).$$

2°. Возьмем одну из цепочек длины $n+1$, веса $\delta n + \gamma$:

$$(E_{i_0} E_{i_1} \ldots E_{i_n}). \qquad (2.2)$$

Пусть: $\mathfrak{Q}(E_{i_0} E_{i_{\sigma_1}} \ldots E_{i_n}) = (E_{i_0} E_{i_{\sigma_1}} E_{i_{\sigma_1+1}} \ldots E_{i_n})$,

$\mathfrak{Q}(E_{i_{\sigma_1}} E_{i_{\sigma_1+1}} \ldots E_{i_n}) = (E_{i_{\sigma_1}} E_{i_{\sigma_2}} E_{i_{\sigma_2+1}} \ldots E_{i_n})$,

. . . . . .

$\mathfrak{Q}(E_{i_{\sigma_{l-1}}} E_{i_{\sigma_{l+1}+1}} \ldots E_{i_n}) = (E_{i_{\sigma_{l-1}}} E_{i_n})$.

Последовательность состояний $E_{i_0}, E_{i_{\sigma_1}}, E_{i_{\sigma_2}}, \ldots, E_{i_{\sigma_{l-1}}}, E_{i_n}$ образует цепочку; будем называть ее приведенной цепочкой, соответствующей данной цепочке (2.2), и более общо — данному значению n (γ фиксировано).

Каждая приведенная цепочка $(E_{i_0} E_{i_{\sigma_1}} \ldots E_{i_{\sigma_l}})$ обладает следующими свойствами:

а) если $E_{i_{\sigma_l}} = E_{i_{\sigma_k}}$ $(0 \leqslant i < k \leqslant l)$, то удельный вес цикла $(E_{i_{\sigma_i}} E_{i_{\sigma_{l+1}}} \ldots E_{i_{\sigma_{k-1}}})$ больше δ;

б) $\sum_{i=0}^{l} f(E_{i_{\sigma_l}}) = \delta l + \gamma$.

Обратно: любая из цепочек, удовлетворяющих этим двум требованиям, является приведенной, однако предстоит еще выяснить, каким значениям n соответствует та или иная из них.

3°. Обозначим через $\mathfrak{M}_{qj}(\gamma)$ множество всех цепочек, начинающихся в E_q, кончающихся в E_j и обладающих свойствами а), б), сформулированными в п. 2 § 2. Убедимся в том, что множество $\mathfrak{M}_{qj}(\gamma)$ конечное.

Действительно, в противном случае можно было бы выделить в $\mathfrak{M}_{qj}(\gamma)$ бесконечную последовательность цепочек с возрастающими длинами L_i $(i = 1, 2, \ldots)$. В силу свойства б) это означало бы, что

$$\lim_{i\to\infty} \frac{S_i}{L_i} = \delta, \tag{2.3}$$

где S_i — вес выделенной цепочки с номером i. Поскольку, однако, любая цепочка длины $l+1$ содержит хотя бы один цикл, то (2.3), ввиду свойства а), противоречит минимальности удельного веса δ.

Заметим, что множество $\mathfrak{M}_{qj}(\gamma)$ может оказаться пустым. В этом случае $\varphi(n, \delta n + \gamma) = 0$ для всех натуральных значений n.

В дальнейшем будем считать, что множество $\mathfrak{M}_{qj}(\gamma)$ состоит из m $(m > 0)$ элементов: $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_m$; под $l_\beta + 1$ будем понимать длину цепочки $\mathfrak{C}_\beta$, а под $e_\beta(t)$ — состояние, находящееся на $t+1$ месте от начала в цепочке $\mathfrak{C}_\beta$ $(0 \leqslant t \leqslant l_\beta)$.

4°. Пусть $P_0 = \| \widetilde{p}_{ik} \|$ — квадратная матрица порядка m, получаемая из матрицы $P = \| p_{ik} \|$ по следующему правилу:

$$\widetilde{p}_{ik} = \begin{cases} p_{ik} & \text{если переход } E_i \to E_k \text{ содержится хотя бы в одном минимальном цикле;} \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Матрица P_0 является, вообще говоря, разложимой. В ее нормальном виде все блоки — неразложимые, так как, согласно (2.4), из $\widetilde{p}_{ik} > 0$ следует: $\widetilde{p}_{ik}^{(N)} > 0$ при некотором натуральном N; здесь $\| \widetilde{p}_{ik}^{(N)} \| = P_0^N$. Разложение P_0 на блоки индуцирует разбиение состояний цепи на группы: блоку, образованному элементами из строк и столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_s$ матрицы P_0, ставится в соответствие группа состояний $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_s}$. Обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_\mathfrak{h}$ ненулевые блоки в нормальном виде матрицы P_0, через $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_\mathfrak{h}$ — соответствующие им группы состояний. В ходе доказательства леммы 5 из [5] можно было убедиться в справедливости следующего утверждения:

Лемма 1. *Цикл $(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_l})$ является минимальным тогда и только тогда, когда выполнены условия:* $\widetilde{p}_{i_k i_{k+1}} > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, l;\ i_{l+1} = i_1)$.

Лемма 1 позволяет выяснить теоретико-вероятностный смысл определенного выше разбиения состояний цепи на группы. Так, получаем:

а) все состояния группы $\mathfrak{G}_h$ $(1 \leqslant h \leqslant \mathfrak{h})$ принадлежат одному общему минимальному циклу;

б) никакие два состояния из разных групп $\mathfrak{G}_{h_1}$ и $\mathfrak{G}_{h_2}$ $(h_1 \neq h_2)$ не принадлежат одному и тому же минимальному циклу;

в) нулевым блокам в нормальном виде P_0 соответствуют отдельные состояния, не принадлежащие ни одному минимальному циклу.

5°. Для цепочки $\mathfrak{C}_\beta$ (см. п. 3 § 2) определим характеристики $L_\beta(t)$, $H_\beta(t)$, $K_\beta(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l_\beta,\ 1 \leqslant \beta \leqslant m)$ равенствами:

$$L_\beta(t) = l, \text{ если } e_\beta(t) = E_l;$$

$$H_\beta(t) = \begin{cases} h, & \text{если } e_\beta(t) \in \mathfrak{G}_h; \\ 0, & \text{если } e_\beta(t) \overline{\in} \mathfrak{G}_h; \end{cases} \qquad [(h = 1, 2, \ldots, \mathfrak{h}) \tag{2.5}$$

$K_\beta(t) = k$, если при некотором h $(1 \leqslant h \leqslant \mathfrak{h})$ выполняется: $e_\beta(k+\tau) \in \mathfrak{G}_h$ $(\tau = 0, 1, \ldots, t-k)$, $e_\beta(k-1) \overline{\in} \mathfrak{G}(h)$ (в случае $k = 0$ последнее условие отпадает); $K_\beta(t)$ не определяется, если $H_\beta(t) = 0$;

Условимся говорить, что цепочка $\mathfrak{C}_\beta$ пересекает r $(r \geqslant 1)$ раз группу состояни $\mathfrak{G}_h$, если среди значений t $(0 \leqslant t \leqslant l_\beta)$ таких, что $H_\beta(t) = h$, $K_\beta(t) = t$, ровно r разли ных $(1 \leqslant \beta \leqslant m)$.

Способ нахождения всех цепочек длины $n+1$, для которых цепочка $\mathfrak{C}_\beta$ служи приведенной, указывает

Лемма 2. *Для того чтобы цепочка* (2.2) *имела в качестве приведенной цепочк* $\mathfrak{C}_\beta$, *необходимо и достаточно, чтобы* (2.2) *можно было получить из* $\mathfrak{C}_\beta$ *добавлением посл состояния* $e_\beta(t)$ *одного из минимальных циклов, оканчивающихся состоянием* $e_\beta(t$ $(H_\beta(t) > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant l_\beta)$, *соблюдая при этом условие: цикл, добавленный после* $e_\beta(t)$, *не до жен содержать состояние* $e_\beta(\tau)$, *где* $K_\beta(t) \leqslant \tau < t$ (*для тех* t, *для которых* $K_\beta(t) =$ *это условие отпадает*).

План доказательства леммы 2 ясен из пп. 1, 2 § 2; его осуществление не вызыва затруднений, поскольку в приведенной цепочке можно указать все те состояния, посл которых из исходной цепочки могли быть удалены минимальные циклы, — а это позв ляет восстановить полный прообраз приведенной цепочки в множестве всех цепоче длины $n+1$.

Вообще говоря, может оказаться, что при данном значении n цепочка $\mathfrak{C}_\beta$ не являет приведенной ни для какой цепочки длины $n+1$. Вопрос о том, каким значениям соответствует фиксированная приведенная цепочка, решает

Лемма 3. *Пусть цепочка* $\mathfrak{C}_\beta$ *пересекает группы* $\mathfrak{G}_{h_1}, \ldots, \mathfrak{G}_{h_\mu}$ *и не пересекает н какие другие группы* $\mathfrak{G}_h$; j_h — *индекс imprimitивности матрицы* B_h; J_β — *общий на больший делитель чисел* $j_{h_1}, \ldots, j_{h_\mu}$. *Тогда:*

а) если цепочка $\mathfrak{C}_\beta$ *является приведенной для некоторой цепочки длины* $n+1$, *т*

$$n \equiv l_\beta \pmod{J_\beta} \qquad (2.6$$

б) для всех достаточно больших значений n *таких, что условие* (2.6) *выполнен существуют цепочки длины* $n+1$, *для которых* $\mathfrak{C}_\beta$ *является приведенной цепочкой.*

Доказательство. При проведении классификации неприводимых цепей Марков ([1], [3]) доказывается, что общий наибольший делитель (сокращенно: о. н. д.) дли всех циклов, проходящих через фиксированное состояние, равен индексу imprimitивност матрицы переходных вероятностей. Применение этого положения к группам состояни $\mathfrak{G}_{h_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant \mu)$ дает $\widetilde{p}_{ii}^{(N)} = 0$, если $N \not\equiv 0 \pmod{j_h}$, $E_i = \mathfrak{G}_h$, что в соединении с леммо 2, позволяет сделать вывод: для того чтобы существовала цепочка длины $n+1$, имею щая приведенной цепочку $\mathfrak{C}_\beta$, необходимо выполнение условия (2.6).

Второе утверждение леммы 3 докажем прямым построением цепочек длины $n+1$ заданной приведенной. Пусть $t = K_\beta(t)$; выберем минимальные циклы, кончающиеся $e_\beta(t)$, с о. н. д. длин, равным j_h $(h = H_\beta(t))$, и вставим их последовательно один за други в цепочку $\mathfrak{C}_\beta$ после состояния $e_\beta(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l_\beta)$. В результате первоначальный соста цепочки $\mathfrak{C}_\beta$ пополнится циклами, о. н. д. длин которых равен J_β. Станем менять длин образовавшейся цепочки, повторяя произвольное число раз какие-либо из добавленны циклов; имеющиеся в этом направлении возможности описываются известной теоретико числовой леммой:

если $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — *натуральные числа с о. н. д.* d, *то любое достаточно бол шое натуральное число* M, *такое что* $M \equiv 0 \pmod{d}$, *представимо в виде* $M = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$ *где* a_i — *целые неотрицательные числа.* Выбирая здесь за x_i длины добавленных цикло и полагая $M = h - l_\beta$, видим, что для осуществления задуманного построения доста точно при расширении цепочки $\mathfrak{C}_\beta$ повторить a_i раз цикл длины x_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Закончим на этом рассмотрение структуры цепочек длины $n+1$, веса $\delta n + \gamma$ перейдем к изучению их вероятностных свойств.

§ 3. Локальная предельная теорема для крайних значений $\sum_{k=0}^{n} f(e(k))$

1°. Обозначим $P_\beta^{(n)}(t)$ вероятность того, что цепочка $\{e(0)\,e(1)\,\ldots\,e(n)\}$ $(e(0)=E_q)$ ...ет иметь в качестве приведенной цепочку $\{e_\beta(0)\,e_\beta(1)\,\ldots\,e_\beta(t)\}$. Так как описанное ...п. 2 § 2 преобразование цепочек в приведенные однозначно и применимо к любой ...очке, то верна формула:

$$P_{qj}(n,\ \delta n+\gamma)=\sum_{\beta=1}^{m} P_\beta^{(n)}(l_\beta). \tag{3.1}$$

Исследуем в дальнейшем поведение каждой компоненты $P_\beta^{(n)}(l_\beta)$ в отдельности.

2°. Рассмотрим цепочку $\mathfrak{C}_\beta$ $(1\leqslant\beta\leqslant m)$. Состоянию $e_\beta(t)$ $(0\leqslant t\leqslant l_\beta)$ такому, что ...$(t)>0$ соответствует матрица вероятностей переходов, принадлежащих тем минималь...м циклам, которые могут быть вставлены после $e_\beta(t)$ для расширения цепочки $\mathfrak{C}_\beta$ ...смысле, указанном в лемме 2. Будем записывать эту матрицу как $B_\beta(t)$. При $t=K_\beta(t)$ ...трица $B_\beta(t)$ равняется B_h $(h=H_\beta(t))$, а при $t>K_\beta(t)$ матрица $B_\beta(t)$ получается из вычеркиванием строк и столбцов, отвечающих состояниям $e_\beta(\tau)$ $(\tau=K_\beta(t),\ K_\beta(t)+1,\ \ldots,\ t-1)$.

Пусть $\pi_\beta^{(n)}(t)$ — элемент матрицы $B_\beta^{(n)}(t)$, находящийся на пересечении строки и ...олбца, соответствующих состоянию $e_\beta(t)$. Следуя известным рассуждениям теории цепей ...аркова, приходим к выводу: $\pi_\beta^{(n)}(t)$ равно вероятности того, что последовательность ...стояний $e(0),\ e(1),\ \ldots,\ e(n-1)$ $(e(0)=e_\beta(t))$ составит минимальный цикл, не содержа...й $e_\beta(k),\ e_\beta(k+1),\ \ldots,\ e_\beta(t-1)$ $(k=K_\beta(t)$; если $K_\beta(t)=t$, то в минимальном цикле ...врешаются все допустимые состояния) и что при этом окажется $e(n)=e_\beta(t)$. Поскольку ...(t) является неразложимой матрицей с неотрицательными элементами, то асимптоти...ское выражение для $\pi_\beta^{(n)}(t)$ дается формулой Перрона (см., например, [3]):

$$\pi_\beta^{(n)}(t)=\begin{cases} j_\beta(t)\,\dfrac{A_\beta(t)}{C_\beta(t)}\,\lambda_\beta^n(t)+o\left((\lambda_\beta(t)-\varepsilon)^n\right), & \text{если } n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, j_\beta(t)),\\ 0, & \text{если } n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, j_\beta(t)).\end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь:

$\lambda_\beta(t)$ — наибольший положительный корень уравнения

$$\det\|\lambda E-B_\beta(t)\|=0, \tag{3.3}$$

$A_\beta(t)$ — алгебраическое дополнение к элементу $\lambda_\beta(t)-\pi_\beta^{(1)}(t)$ в матрице $\lambda_\beta(t)E-B_\beta(t)$;

$$C_\beta(t)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\det\|\lambda E-B_\beta(t)\|\right]_{\lambda=\lambda_\beta(t)};$$

$j_\beta(t)$ — индекс imprimitивности матрицы $B_\beta(t)$;

ε — некоторое положительное число, не превосходящее $\lambda_\beta(t)$;

Если $t>K_\beta(t)$, то согласно лемме Виландта ([4] гл. XIII) имеет место неравенство $\lambda_\beta(t)<\lambda_\beta(t-1)$; следовательно,

$$\pi_\beta^{(n)}(t)=o\left((\lambda_\beta(k)-\varepsilon_1)^n\right),\ 0\leqslant\varepsilon_1<\lambda_\beta(k)\ \text{при}\ t>K_\beta(t)=k. \tag{3.4}$$

Заметим также, что из леммы Виландта вытекает, что $\lambda_\beta(t)$ меньше максимального ...ложительного характеристического числа матрицы $P=\|p_{ik}\|$, если только не все ...иклы рассматриваемой цепи являются минимальными, $(t=1,\ 2,\ \ldots,\ l_\beta)$. В том случае, ...гда удельные веса всех циклов одинаковы, имеем: $\mathfrak{h}=1$, $B_1=P$.

3°. С формулами (3.2), (3.4) связан излагаемый ниже способ выделения в $P_\beta^{(n)}(t)$,

$(0 \leqslant t \leqslant I_\beta;\ 1 \leqslant \beta \leqslant m)$ главного члена при $n \to \infty$. Введем предварительно следующие обозначения:

$$\Lambda_\beta(t) = \max_{1 \leqslant k \leqslant \mu} \lambda_{h_k}, \tag{3.}$$

где λ_{h_k} — наибольшая из абсолютных величин характеристических чисел матрицы B_{h_k};

$$J_\beta(t) = \text{о.н.д.}\ \{j_{h_k}\}, \tag{3.}$$

где j_{h_k} — индекс импримитивности матрицы B_{h_k};

$I_\beta(t) = \text{о.н.д.}\ \{j_{h_k}\}$, по всем h_k, для которых $\lambda_{h_k} = \Lambda_\beta(t)$, (3.

$R_\beta(t) = \sum r_{h_k}$ по всем h_k, для которых $\lambda_{h_k} = \Lambda_\beta(t)$. (3.

Теорема 1. *Предположим, что цепочка* $\{e_\beta(0)\, e_\beta(1) \ldots e_\beta(t)\}$ *пересекает* J_k р*группу состояний* $\mathfrak{G}_{h_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ *и не пересекает другие группы* $\mathfrak{G}_h$.

Пусть $n_i \to \infty$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ *по закону:* $n_i \equiv \nu + t \pmod{I_\beta(t)}$, $\nu \equiv 0 \pmod{I_\beta(t)}$ *(*ν *— фиксированное число). Тогда существует конечный положительный предел*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{P_\beta^{(n_i)}(t)}{n_i^{R_\beta(t)-1} \Lambda_\beta^{n_i}(t)} = \Pi_\beta^{(\nu)}(t).$$

Доказательство будем проводить по индукции. Утверждение теоремы 1 для $t =$ вытекает из (3.2). При $t > 0$ имеем:

$$P_\beta^{(n)}(t) = \begin{cases} P_\beta^{(n-1)}(t-1)\, p_{l_1 l_2}, & \text{если } H_\beta(t) = 0; \text{ здесь } l_1 = L_\beta(t-1);\ l_2 = L_\beta(t); \\ \sum_{k=1}^{n} P_\beta^{(k-1)}(t-1)\, p_{l_1 l_2}\, \pi_\beta^{(n-k)}(t), & \text{если } H_\beta(t) > 0 \text{ (см. п. 2° § 3).} \end{cases} \tag{3.}$$

Предположим, что теорема 1 верна для некоторого значения $t-1$; тогда ее справедливость для t в случае $H_\beta(t) = 0$ несомненна. Пусть $H_\beta(t) > 0$, разделим представляющиеся здесь возможности на три случая:

а) $\lambda_\beta(t) = \Lambda_\beta(t-1)$, б) $\lambda_\beta(t) > \Lambda_\beta(t-1)$, в) $\lambda_\beta(t) < \Lambda_\beta(t-1)$

а) В этом случае: $R_\beta(t) = R_\beta(t-1) + 1$. Формула (3.9) приводит к соотношению

$$\frac{P_\beta^{(n)}(t)}{n^{R_\beta(t)-1} \Lambda_\beta^n(t)} = \frac{p_{l_1 l_2}}{n \Lambda_\beta(t)} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_\beta^{(k-1)}(t-1)}{(k-1)^{R_\beta(t-1)-1} \Lambda_\beta^{k-1}(t-1)} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{R_\beta(t)-2} \frac{\pi_\beta^{(n-k)}(t)}{\Lambda_\beta^{n-k}(t)}. \tag{3.1}$$

В силу упоминавшейся ранее теоретико-числовой леммы (см. доказ. леммы 3), для каждого достаточно большого натурального значения ν, удовлетворяющего условию $\nu \equiv \pmod{J_\beta(t)}$, найдутся такие целые неотрицательные числа $Y_1(\nu)$, $Y_2(\nu)$, что

$$Y_1(\nu) + Y_2(\nu) = \nu;\ Y_1(\nu) \equiv 0 \pmod{J_\beta(t-1)};\ Y_2(\nu) \equiv 0 \pmod{j_\beta(t)}.$$

Обозначим через $y_i(\nu)$ наименьшее из возможных значений $Y_i(\nu)$ $(i = 1, 2)$ при фикс рованном ν, а через $\varphi_\beta(t)$ — общее наименьшее кратное (сокращенно: о.н.к.) $J_\beta(t-1)$ $j_\beta(t)$. Среди чисел $y_i(\nu) + k\varphi_\beta(t)$ $\left(k = 0, 1, \ldots \left[\frac{\nu - y_i(\nu)}{\varphi_\beta(t)}\right]\right)$ при достаточно больш значении ν содержится $\psi_\beta(t) = \dfrac{I_\beta(t-1)}{\text{о.н.д.}\ \{I_\beta(t-1),\ \varphi_\beta(t)\}}$ различных вычетов по моду $I_\beta(t-1)$; пусть $w_i(\nu)$ — наименьший неотрицательный из них. Установим справедливос следующего утверждения:

Лемма 4. *Если существует такое d, что при любом достаточно большом натуральном n*

$$w_1(n+d) = w_1(n), \tag{3.11}$$

последовательность $\dfrac{P_\beta^{(N_i)}(t)}{N_i^{R_\beta(t)-1}\Lambda_\beta^{N_i}(t)}$ $(N_i = \nu + t + id;\ i = 0, 1, 2, \ldots)$ *имеет предел.*

Действительно, полагая в (3.10) $n = \nu + t + id$ и опуская слагаемые, заведомо равную нулю, получаем:

$$\frac{P_\beta^{(N_i)}(t)}{N_i^{R_\beta(t)-1}\Lambda_\beta^{N_i}(t)} = \frac{p_{l_1 l_2}}{\Lambda_\beta(t)\,N_i} \sum_{k=0}^{\left[\frac{N_i - y_1(\nu) - t}{\varphi_\beta(t)}\right]} \frac{P_\beta^{(\vartheta_k)}(t-1)}{\vartheta_k^{R_\beta(t-1)-1}\Lambda_\beta^{\vartheta_k}(t-1)} \times$$

$$\times \left(\frac{\vartheta_k}{N_i}\right)^{R_\beta(t)-2} \frac{\pi_\beta^{(N_i-1-\vartheta_k)}(t)}{\Lambda_\beta^{N_i-1-\vartheta_k}(t)}, \tag{3.12}$$

$\vartheta_k = y_1(\nu) + t - 1 + k\varphi_\beta(t)$. Из (3.12) видно, что выражение для $\dfrac{P_\beta^{(N_i)}(t)}{N_i^{R_\beta(t)-2}\Lambda_\beta^{N_i}(t)}$

жет отличаться при фиксированном i от суммы

$$\sum_i' = \frac{p_{l_1 l_2}}{\Lambda_\beta(t)} \sum_{k=0}^{\psi_\beta(t)-1} \sum_{l=0}^{M_i} \frac{P_\beta^{(\vartheta_{kl})}(t-1)}{\vartheta_{kl}^{R_\beta(t-1)-1}\Lambda_\beta^{\vartheta_{kl}}(t-1)} \left(\frac{\vartheta_{kl}}{N_i}\right)^{R_\beta(t)-2} \frac{\pi_\beta^{(N_i-\vartheta_{kl}-1)}(t)}{\Lambda_\beta^{N_i-\vartheta_{kl}-1}(t)},$$

$$\vartheta_{kl} = w_1(\nu) + t - 1 + k\varphi_\beta(t) + l\chi_\beta(t);\ \chi_\beta(t) = \text{о.н.к.}\ \{I_\beta(t-1),\ \varphi_\beta(t)\} =$$
$$= \text{о.н.к.}\ \{J_\beta(t-1),\ j_\beta(t)\},$$

$$M_i = \left[\frac{N_i - w_1(\nu) - t - k\varphi_\beta(t)}{\chi_\beta(t)}\right],$$

лишь отсутствием некоторых слагаемых, общее число которых не превосходит независящей от i постоянной. Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty}\left\{\frac{P_\beta^{(N_i)}(t)}{N_i^{R_\beta(t)-1}\Lambda_\beta^{N_i}(t)} - \frac{\sum_i'}{N_i}\right\} = 0. \tag{3.13}$$

Принимая во внимание предположение индукции, формулу (3.2) и равенство

$\dfrac{1}{M_i}\sum_{l=0}^{M_i}\left(\dfrac{\vartheta_{kl}}{N_i}\right)^{R_\beta(t)-2} = \dfrac{1}{R_\beta(t)-1}$, находим:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\sum_i'}{N_i} = \frac{p_{l_1 l_2}}{\Lambda_\beta(t)} \cdot \frac{j_\beta(t)}{(R_\beta(t)-1)\,\chi_\beta(t)} \cdot \frac{A_\beta(t)}{C_\beta(t)} \sum_{k=0}^{\psi_\beta(t)-1}{}' \Pi_\beta^{(w_1(\nu)\ \ k\varphi_\beta(t))}(t-1).$$

от результат и соотношение (3.13) заключают в себе утверждение леммы 4.

Завершим рассмотрение случая а) доказательством того, что наименьшим из натуральных значений d, при которых независимо от n выполняется (3.11), является число t). Обратимся к исходным равенствам:

$$y_1(\nu) \equiv 0 \pmod{J_\beta(t-1)};\ y_1(\nu) \equiv \nu \pmod{j_\beta(t)}$$
$$y_1(\nu+d) \equiv 0 \pmod{J_\beta(t-1)};\ y_1(\nu+d) \equiv \nu + d \pmod{j_\beta(t)}. \tag{3.14}$$

Согласно определению $w_1(\nu)$, равенство (3.11) возможно тогда и только тогда, когд существует такое целое число x, что

$$y_1(\nu+d)-y_1(\nu)\equiv x\cdot\varphi_\beta(t)\pmod{I_\beta(t-1)}. \tag{3.15}$$

Как известно, для разрешимости сравнения (3.15) относительно x необходимо и доста точно, чтобы выполнялось условие

$$y_1(\nu+d)-y_1(\nu)\equiv 0\pmod{\text{о.н.д. }\{I_\beta(t-1),\ \varphi_\beta(t)\}},$$

$$\text{о.н.д. }\{I_\beta(t-1),\ \varphi_\beta(t)\}=J_\beta(t-1)\,\frac{\text{о.н.д. }\{j_\beta(t),\ I_\beta(t-1)\}}{\text{о.н.д. }\{j_\beta(t),\ I_\beta(t-1),\ I_\beta(t)\}}=$$

$$=\text{о.н.к. }\{J_\beta(t-1),\ I_\beta(t)\}.$$

Разность $y_1(\nu+d)-y_1(\nu)$ разделится на о.н.к. $\{J_\beta(t-1),\ I_\beta(t)\}$ в том и тольк в том случае, когда она будет делиться на каждое из чисел $J_\beta(t-1)$, $I_\beta(t)$ порозн Производя в (3.14) попарное вычитание сравнений, получаем:

$$y_1(\nu+d)-y_1(\nu)\equiv\begin{cases}0\pmod{J_\beta(t-1)}\\ d\pmod{I_\beta(t)}.\end{cases}$$

Следовательно, для выполнения равенства (3.11) необходимо и достаточно, чтобы делилось на $I_\beta(t)$, что и требовалось доказать.

б) Пусть $\lambda_\beta(t)>\Lambda_\beta(t-1)$; тогда $\Lambda_\beta(t)=\lambda_\beta(t)$, $R_\beta(t)=1$, $I_\beta(t)=j_\beta(t)$. Полага в (3.9) n равным $\nu+t+lI_\beta(t)$ $(=n_i)$ и упорядочивая запись слагаемых тем же способом что и в случае а), приходим к соотношению, аналогичному (3.12):

$$\frac{P_\beta^{(n_i)}(t)}{\Lambda_\beta^{n_i}(t)}=\frac{p_{l_1l_2}}{\Lambda_\beta(t)}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n_i-y_1(\nu)-t}{\varphi_\beta(t)}\right]}\frac{P_\beta^{(\vartheta_k)}(t-1)}{\vartheta_k^{R_\beta(t-1)-1}\Lambda_\beta^{\vartheta_k}(t-1)}\times$$

$$\times\,\vartheta_k^{R_\beta(t-1)-1}\left(\frac{\Lambda_\beta(t-1)}{\Lambda_\beta(t)}\right)^{\vartheta_k}\times\frac{\pi_\beta^{(n_i-1-\vartheta_k)}(t)}{\Lambda_\beta^{n_i-1-\vartheta_k}(t)}.$$

Здесь, в отличие от ранее рассмотренного случая, величины n_i-1- $(i=0,1,2,\ldots)$ обязательно имеют один и тот же вычет по модулю $j_\beta(t)$, и это позв ляет написать для $\dfrac{P_\beta^{(n_i)}(t)}{\Lambda_\beta^{n_i}(t)}$ точную формулу в виде:

$$\frac{P_\beta^{(n_i)}(t)}{\Lambda_\beta^{n_i}(t)}=\frac{p_{l_1l_2}}{\Lambda_\beta(t)}\cdot\sum_{k=0}^{\varphi_\beta(t)-1}\sum_{l=0}^{\widetilde{M}_i}\frac{P_\beta^{(\vartheta_{kl})}(t-1)}{\widetilde{\vartheta}_{kl}^{R_\beta(t-1)-1}\Lambda_\beta^{\widetilde{\vartheta}_{kl}}(t-1)}\times$$

$$\times\,\widetilde{\vartheta}_{kl}^{R_\beta(t-1)-1}\cdot\left(\frac{\Lambda_\beta(t-1)}{\Lambda_\beta(t)}\right)^{\widetilde{\vartheta}_{kl}}\cdot\frac{\pi_\beta^{(n_i-1-\widetilde{\vartheta}_{kl})}(t)}{\Lambda_\beta^{n_i-1-\widetilde{\vartheta}_{kl}}(t)},$$

где

$$\widetilde{\vartheta}_{kl}=y_1(\nu)+t-1+k\varphi_\beta(t)+l\chi_\beta(t);\quad \widetilde{M}_i=\left[\frac{n_i-y_1(\nu)-t-k\varphi_\beta(t)}{\chi_\beta(t)}\right].$$

Так как по предположению индукции величина $\dfrac{P_\beta^{(\widetilde{\vartheta}_{kl})}(t-1)}{\widetilde{\vartheta}_{kl}^{R_\beta(t-1)}\ {}^{1}\Lambda_\beta^{\widetilde{\vartheta}_{kl}(t-1)}}$ при $l\to\infty$

мится к $\Pi_\beta^{(y_1(\nu)+k\varphi_\beta(t))}(t-1)$ и поскольку, согласно (3.2), (3.4), ряд $\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{\vartheta}_{kl}^{R_\beta(t-1)-1}\times$

$\left(\dfrac{\Lambda_\beta(t-1)}{\Lambda_\beta(t)}\right)^{\widetilde{\vartheta}_{kl}}$ абсолютно сходится к некоторой сумме $\sigma_\beta^{k)}(t)$, а

$$\frac{\pi_\beta^{(n_i-1-\widetilde{\vartheta}_{kl})}}{\Lambda_\beta^{n_i-1-\widetilde{\vartheta}_{kl}}}\to j_\beta(t)\frac{A_\beta(t)}{C_\beta(t)}\ \text{при}\ i\to\infty,$$

предел правой части в (3.16) при $i\to\infty$ существует и равен

$$\frac{p_{l_1l_2}}{\Lambda_\beta(t)}\,j_\beta(t)\,\frac{A_\beta(t)}{C_\beta(t)}\sum_{k=0}^{\psi_\beta(t)-1}\sigma_\beta^{(k)}(t)\,\Pi_\beta^{(y_1(\nu)+k\varphi_\beta(t))}(t-1).$$

в) В случае $\lambda_\beta(t)<\Lambda_\beta(t-1)$ имеем:

$$\Lambda_\beta(t)=\Lambda_\beta(t-1);\ R_\beta(t)=R_\beta(t-1);\ I_\beta(t)=I_\beta(t-1).$$

дставим в формулу (3.9) вместо n величину $n_i=\nu+t+iI_\beta(t)$ и преобразуем по-енное выражение к виду:

$$\frac{P_\beta^{(n_i)}(t)}{n_i^{R_\beta(t)-1}\Lambda_\beta^{n_i}(t)}=\frac{p_{l_1l_2}}{\Lambda_\beta(t)}\sum_{k=0}^{\psi_\beta(t)-1}\sum_{i}\left(\frac{n_i-1-y_{2\nu}-k\varphi_\beta(t)}{\chi_\beta(t)}\right),$$

$$\sum_i(n)=\sum_{l=0}^{n}\frac{\pi_\beta^{(\varkappa_{kl})}(t)}{\Lambda_\beta^{\varkappa_{kl}}(t)}\cdot\frac{P_\beta^{(n_i-1-\varkappa_{kl})}(t-1)}{(n_i-1-\varkappa_{kl})^{R_\beta(t-1)-1}\Lambda_\beta^{n_i-1-\varkappa_{kl}}(t-1)}\times$$

$$\times\left(\frac{n_i-1-\varkappa_{kl}}{n_i}\right)^{R_\beta(t)-1},$$

$$\varkappa_{kl}=y_2(\nu)+k\varphi_\beta(t)+l\chi_\beta(t)$$

носительно других обозначений см. случай а)). Опираясь на предположение индукции ормулу (3.4), выводим оценку: $\left|\sum_i(n)-\sum_i(n')\right|<\varepsilon$ для всех достаточно больших n': $n_i\geqslant n'\geqslant n\geqslant n_0(\varepsilon)$, при произвольном положительном числе ε. Отсюда следует, при $i\to\infty$ отношение $\dfrac{P_\beta^{(n_i)}(t)}{n_i^{R_\beta(t)-1}\Lambda_\beta^{n_i}(t)}$ стремится к конечному пределу, записы-мому как

$$\frac{p_{l_1l_2}}{\Lambda_\beta(t)}\sum_{k=0}^{\psi_\beta(t)-}\tau_\beta^{(k)}(t)\,\Pi_\beta^{(\nu-y_2(\nu)-k\varphi_\beta(t))}(t-1),$$

$$\tau_\beta^{(k)}(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi_\beta^{(y_2(\nu)+k\varphi_\beta(t)+l\chi_\beta(t))}(t)}{\Lambda_\beta^{y_2(\nu)+k\varphi_\beta(t)+l\chi_\beta(t)}(t)}.$$

4°. Подстановка в (3.1) значений $P_\beta^{(n)}(t_\beta)$, даваемых теоремой 1 при $t = t_\beta$, приво
к локальной предельной теореме для крайних значений $\sum_{k=0}^{n} f(e(k))$. Соответствую
формулировка была дана в § 1; смысл использованных при этом обозначений тот
что и в § 3 (см. п. 1° § 3, (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), а также п. 3° § 2). В специаль
выводе интегральной предельной теоремы для крайних значений $\sum_{k=0}^{n} f(e(k))$ нет необ
димости, так как вероятность $\mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n} f(e(k)) \leqslant \delta n + \Gamma,\ e(n) = E_j / e(0) = E_q\right\}$ получае
суммированием по γ величин $P_{qj}(n, \delta n + \gamma)$ в числе, не превышающем некоторой
зависящей от n постоянной.

5°. Для фактического определения значений $\Pi_\beta^{(\nu)}(t)$ могут быть использованы рек
рентные соотношения, вытекающие из результатов п. 3 § 3:

$$\Pi_\beta^{(\nu)}(t) = \frac{p_{l_1 l_2}}{\Lambda_\beta(t)} \cdot j_\beta(t) \cdot \frac{A_\beta(t)}{C_\beta(t)} \cdot \frac{1}{(R_\beta(t)-1)\chi_\beta(t)} \sum_{k=0}^{\psi_\beta(t)-1} \Pi_\beta^{(w_1(\nu)+k\varphi_\beta(t))}(t-1),$$

если $\lambda_\beta(t) = \Lambda_\beta(t-1)$

$$\Pi_\beta^{(\nu)}(t) = \frac{p_{l_1 l_2}}{\Lambda_\beta(t)} \cdot j_\beta(t) \frac{l_\beta(t)}{C_\beta(t)} \sum_{k=0}^{\psi_\beta(t)-1} \sigma_\beta^{(k)}(t) \Pi_\beta^{(y_1(\nu)+k\varphi_\beta(t))}(t-1),$$

если $\Lambda_\beta(t) > \lambda_\beta(t-1)$

$$\Pi_\beta^{(\nu)}(t) = \frac{p_{l_1 l_2}}{\Lambda_\beta(t)} \sum_{k=0}^{\psi_\beta(t)-1} \tau_\beta^{(k)}(t) \cdot \Pi_\beta^{(\nu - y_2(\nu) - k\varphi_\beta(t))}(t-1),$$

если $\lambda_\beta(t) < \Lambda_\beta(t-1)$ с начальным условием: $\Pi_\beta^{(0)}(\tau) = j_\beta(\tau)\frac{A_\beta(\tau)}{C_\beta(\tau)}$, где τ — наим
шее из значений $t\ (0 \leqslant t \leqslant t_\beta)$, для которых $H_\beta(t) > 0$.

Другой способ нахождения пределов $\Pi_\beta^{(\nu)}(t)$ будет указан в следующем парагра

§ 4. Точная и асимптотическая формулы для $P_{qj}(n, \delta n + \gamma)$

1°. Как известно (см., например, [3] гл. IV), явное выражение для производя
функции $\sum_s P_{qj}(n, s) \cdot z^s$ при фиксированном z дается формулой

$$\sum_s P_{qj}(n, s)\, z^s = z^{s_q} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(m_k(z))!} \cdot \frac{d^{m_k(z)-1}}{d\lambda^{m_k(z)-1}} \left[\frac{\lambda^n(z) \cdot D_{qj}(z, \lambda)}{D_k(z, \lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k(z)}.$$

Здесь:

$\lambda_1(z), \lambda_2(z), \ldots, \lambda_m(z)$ — характеристические числа матрицы $\lambda E - \| p_{ik} z^{s_k} \|$; $m_k(z)$ — чи
$\lambda_i(z)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ равных $\lambda_k(z)$; $D_{qj}(z, \lambda)$ — алгебраическое дополнение к элеме
$\lambda\delta_{jq} - p_{jq} z^{s_q}$ в матрице $\lambda E - \| p_{ik} z^{s_k} \|$,

$$D_k(z, \lambda) = \frac{\det(\lambda E - \| p_{ik} z^{s_k} \|)}{(\lambda - \lambda_k(z))^{m_k(z)}}.$$

В достаточно малой окрестности нуля, из которой удалены точки одного из радиу-, можно считать, что

а) $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$, ..., $\lambda_m(z)$ — как функции z — являются однозначными аналитиче-ми ветвями алгебраической функции $\lambda(z)$, неявно заданной уравнением $(\lambda E - \| p_{ik} z^{s_k} \|) = 0$;

б) $m_k(z)$ не зависит от z ($k = 1, 2, \ldots, m$);

в) функция $\dfrac{d^i}{d\lambda^i}\left[\dfrac{D_{qj}(z,\lambda)}{D_k(z,\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k(z)}$ разлагается в ряд по (дробным) степеням z, из торых лишь конечное число отрицательных ($i \leqslant mk(z) - 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$).

Далее, в силу леммы 5 из [5], функции $\lambda_k(z)$ $k = 1, 2, \ldots, m$) имеют в точке $z=0$ и порядка не ниже δ.

Следовательно, как точную, так и асимптотическую формулу для $P_{qj}(n, \delta n + \gamma)$ жно получить в результате выполнения над коэффициентами степенных рядов в (4.1) фметических операций в числе, не превышающем некоторой конечной величины, зави-щей от γ, но не зависящей от n.

Предположим, что цепочки, образующие множество $\mathfrak{m}_{qj}(\gamma)$, известны. В таком слу-е применение к (4.1) результатов § 3 дает в общем виде явное выражение коэффи-ента при главном члене в $P_{qj}(n, \delta n + \gamma)$. Кроме того, как это будет видно из даль-йшего, сделанное предположение позволяет упростить вычисление $P_{qj}(n, \delta n + \gamma)$ при нкретных значениях p_{ik}, s_k ($1 \leqslant i,\ k \leqslant m$).

2°. Обобщая определение п. 1 § 3, введем в рассмотрение вероятность $P_\beta^{(n)}(t,i)$ того, о цепочка $\{e(0), e(1), \ldots, e(n)\}$ ($e(0) = E_q$) будет удовлетворять условиям:

а) $e(n) = E_i$;

б) при некотором k ($0 \leqslant k \leqslant n$) выполняется:

(1) для цепочки $\{e(0), e(1), \ldots, e(k)\}$ приведенной служит $\{e_\beta(0)\, e_\beta(1) \ldots e_\beta(t)\}$;

(2) $e(k+\tau) \in G_h$ ($1 \leqslant \tau \leqslant n-k$), здесь $h = H_\beta(t)$;

(3) $e(k+\tau) \neq e_\beta(t')$ ($1 \leqslant \tau \leqslant n-k$, $K_\beta(t) \leqslant t' < t$).

Явное выражение $P_\beta^{(n)}(t,\ i)$ дает

Теорема 2. *При всех натуральных значениях n справедливо равенство*

$$P_\beta^{(n)}(t,\ i) = p_\beta(t) \cdot \sum_{k\ 1}^{M} \frac{1}{(m_k-1)!} \cdot \frac{d^{m_k-1}}{d\eta^{m_k-1}} \left[\eta^{n-T_\sigma} \cdot (\eta - \eta_{ik})^{m_k} \left(\prod_{l\ 1}^{T-1} \frac{A_\beta(\sigma_l,\eta)}{C_\beta(\tau_l,\eta)} \right) \cdot \frac{A_\beta^{(i)}(\sigma_T,\eta)}{C_\beta(\sigma_T,\eta)} \right]_{\eta\ \eta_k} \tag{4.2}$$

Здесь:

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_T$ — *набор всех различных номеров* τ, *удовлетворяющих условиям*

$$K_\beta(\tau) = \tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \mathfrak{l}_\beta \quad (t,\ \beta \text{ фиксированы}); \tag{4.3}$$

σ_l — *наименьшее среди всех чисел* σ, *для которых выполняется*

$$\tau \leqslant \sigma \leqslant \mathfrak{l}_\beta,\ H_\beta(\sigma) = H_\beta(\tau_l),\ H_\beta(\sigma+1) \neq H_\beta(\tau_l)\ (1 \leqslant l \leqslant T); \tag{4.4}$$

$\eta_{1,M}$ — *все различные корни уравнения* $\prod_{l=1}^{T} \det\ (\eta E - B_\beta(\tau_l)) = 0$; m_k — *крат-сть корня* η_k ($1 \leqslant k \leqslant M$);

$$C_\beta(\tau,\ \eta) = \det\ (\eta E - B_\beta(\tau)),$$

$A_\beta^{(l_1 l_2)}(\tau, \eta)$ — *алгебраическое дополнение к элементу* $\eta\delta_{l_2 l_1} - p_{l_2 l_1}$ *в матрице* $\eta E - B$

$$A_\beta^{(l_2)}(\tau, \eta) = A_\beta^{(l_1, l_2)}(\tau, \eta) \text{ при } l_1 = L_\beta(t); \; A_\beta(\tau, \eta) = A_\beta^{(l)}(\tau, \eta), \text{ при } l = L_\beta(t)$$

$$p_\beta(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} p_{l_\tau l_{\tau+1}}, \text{ где } l_\tau = L_\beta(\tau);$$

T — *число различных значений* τ *таких, что* $H_\beta(\tau) = 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant l_\beta$.

Доказательство. Согласно лемме 2, величины $P_\beta^{(n)}(t)$, $P_\beta^{(n)}(t, i)$ (β, n фи
рованы, t, i пробегают все допустимые в смысле определений п. 1 § 3, п. 2 § 4 зна
ния) должны удовлетворять системе конечно-разностных уравнений:

$$P_\beta^{(n)}(t) = P_\beta^{(n-1)}(t-1)\, p_{l_1 l_2}, \text{ если } H_\beta(t) = 0, \; t \geqslant 1, \; n \geqslant 1, \text{ здесь } l_1 = L_\beta(t-$$

$$l_2 = L_\beta(t),$$

$$P_\beta^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } H_\beta(0) \text{ и } n > 0, \\ \sum_i P_\beta^{(n-1)}(0, i)\, p_{il}, & \text{если } H_\beta(0) > 0 \text{ и } n > 0, \text{ здесь } l = L_\beta(0) \end{cases}$$

$$P_\beta^{(n)}(t, k) = \sum_i P_\beta^{(n-1)}(t, i)\, p_{ik}, \qquad \text{если } K_\beta(t) > t$$

$$P_\beta^{(n)}(t, k) = P_\beta^{(n)}(t), \qquad \text{если } k = K_\beta(t)$$

$$P_\beta^{(n)}(t) = P_\beta^{(n-1)} \cdot p_{l_1 l_2} + \sum_i P_\beta^{(n-1)}(t, i)\, p_{i l_2}, \text{ если } H_\beta(t) > 0, \; n \geqslant 1, \; t \geqslant 1.$$

здесь $l_1 = L_\beta(t-1)$; $l_2 = L_\beta(t)$,

с начальными условиями:

$$P_\beta^{(0)}(0) = 1; \; P_\beta^{(0)}(t) = 0, \text{ если } t > 0; \; P_\beta^{(0)}(t, i) = 0,$$

если $i^2 + [K_\beta(t) - i]^2 > 0$.

Используя выражения для решений системы (4.8), даваемые общей теорией (
например, 3, гл. I), после преобразования входящих в эти выражения определителей
помощью теоремы Лапласа получаем:

$$P_\beta^{(n)}(t, i) - p_\beta(t) \cdot \sum_{k=1}^{M'} \frac{1}{(m_k' - 1)!} \cdot \frac{d^{m_k' - 1}}{d\eta^{m_k' - 1}} \left[\eta^{n - T_0} \cdot (\eta - \eta_k')^{m_k'} \left(\prod_{\substack{H_\beta(\tau) > 0 \\ 0 \leqslant \tau < \sigma_T}} \frac{A_\beta(\tau, \eta)}{C_\beta(\tau, \eta)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{A_\beta^{(i)}(\sigma_T, \eta)}{C_\beta(\sigma_T, \eta)} \right]_{\eta = \eta_k'}$$

где η_k' — корень кратности m_k' уравнения $\prod\limits_{\substack{H_\beta(\tau) > 0 \\ 0 \leqslant \tau \leqslant \sigma_T}} C_\beta(\tau, \eta) = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant M')$.

Пусть m_k'' означает число множителей $\eta - \eta_k$ в $\prod\limits_{\substack{H_\beta(\tau) > 0 \\ 0 \leqslant \tau \leqslant \sigma_T}} C_\beta(\tau, \eta)$. Сокращая дро

з правой части (4.9) и заменяя слагаемое, соответствующее величине $\tau_i = \tau_{i_k}'$, равным ему выражением

$$p_\beta(t)\frac{1}{(m_k''-1)!}\cdot\frac{d^{m_k''-1}}{d\eta^{m_k''-1}}\left[\eta^{n}\ T_0(\eta-\eta_k')^{m_k''}\cdot\left(\prod_{l=1}^{T-1}\frac{A_\beta(\sigma_l,\eta)}{C_\beta(\tau_l,\eta)}\right)\cdot\frac{A_\beta^{(t)}(\sigma_T,\eta)}{C_\beta(\sigma_T,\eta)}\right]_{\eta=\eta_k'}$$

приходим к формуле (4.2), что и доказывает теорему.

3°. Примем во внимание равенство

$$P_\beta^{(n)}(t,\ l)=P_\beta^{(n)}(l_\beta)\ \text{при}\ t=l_\beta\ \text{и}\ l=L_\beta(l_\beta). \tag{4.10}$$

В сочетании с (3.1) и (4.10) теорема 2 дает явное выражение вероятности $P_{qj}(n,\ \delta n+\gamma)$, которое при всех натуральных значениях n представляет собой сумму тех же членов вида $a_k n^{R_k}\lambda_k^n$, что и выражение, выведенное в п. 1° § 4, но отличается от последнего формой записи коэффициентов a_k.

4°. Теорема 2 позволяет также найти явные выражения для $\Pi_\beta^{(\nu)}(t)$ (см. пп. 3°, 5° § 3); покажем это. Пусть за обозначениями l_β, $L_\beta(t)$, $\lambda_\beta(t)$, $\Lambda_\beta(t)$, $J_\beta(t)$, $I_\beta(t)$, $R_\beta(t)$, τ_l, σ_l, $C_\beta(\tau,\eta)$, $A_\beta(\sigma,\eta)$, $p_\beta(t)$ сохраняется смысл, указанный, соответственно в п. 3° § 2, (2.5), (3.3), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7). Из теоремы Перрона и леммы Виландта ([4] гл. XIII) выводим:

а) уравнение $\prod\limits_{\tau_l\leqslant t}C_\beta(\tau_l,\ \eta)=0$ имеет корни $\Lambda_\beta(t)\,e^{2\pi i\frac{k}{I_\beta(t)}}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ I_\beta(t)-1)$ кратности $R_\beta(t)$;

б) кратность корней уравнения $\prod\limits_{\tau_l\leqslant t}C_\beta(\tau_l,\ \eta)=0$ по абсолютной величине равных $\Lambda_\beta(t)$, но отличных от $\Lambda_\beta(t)\,e^{2\pi i\frac{k}{I_\beta(t)}}$, $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ I_\beta(t)-1)$ меньше $R_\beta(t)$;

в) если $\lambda_\beta(\tau_l)=\Lambda_\beta(t)$, то

$$\left.\frac{A_\beta(\sigma_l,\ \lambda)}{\frac{\partial}{\partial\lambda}C_\beta(\tau_l,\ \lambda)}\right|_{\lambda=\Lambda_\beta(t)e^{2\pi i\frac{k}{I_\beta(t)}}}=e^{2\pi i\frac{k(\tau_l-\sigma_l)}{I_\beta(t)}}\left.\frac{A_\beta(\sigma_l,\ \lambda)}{\frac{\partial}{\partial\lambda}C_\beta(\tau_l,\ \lambda)}\right|_{\lambda=\Lambda_\beta(t)}$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ I_\beta(t)-1).$$

Опираясь на эти результаты, выделим в правой части (4.2), где положено $i=L_\beta(t)$, коэффициент при $n^{R_\beta(t)-1}\Lambda_\beta^n(t)$ для $n\equiv\nu+t\ (\mathrm{mod}\ I_\beta(t))$, $\nu\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ J_\beta(t))$ и приравняем его, согласно теореме 1, величине $\Pi_\beta^{(\nu)}(t)$.

В итоге получим:

$$\Pi_\beta^{(\nu)}(t)=\frac{1}{(R_\beta(t)-1)!}\frac{p_\beta(t)}{\Lambda_\beta^{t+\nu}(t)}\prod_{\substack{\lambda_\beta(\tau_l)=\Lambda_\beta(t)\\ \tau_l\leqslant t}}\left.\frac{\lambda^{\sigma_l-\tau_l}A_\beta(\sigma_l,\ \lambda)}{\frac{\partial}{\partial\lambda}C_\beta(\tau_l,\ \lambda)}\right|_{\lambda=\Lambda_\beta(t)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{I_\beta(t)-1}\prod_{\substack{\lambda^\nu\lambda_\beta(\tau_l)\cdot\ \Lambda_\beta(t)\\ \tau_l\leqslant t}}\left.\frac{\lambda^{\sigma_l-\tau_l+1}A_\beta(\sigma_l,\ \lambda)}{C_\beta(\tau_l,\ \lambda)}\right|_{\lambda=\Lambda_\beta(t)\cdot e^{2\pi i\frac{k}{I_\beta(t)}}}.$$

В заключение заметим, что на матрицу $P=\|p_{ik}\|$ в данной работе не накладывается иных ограничений, кроме неотрицательности элементов p_{ik} $(1\leqslant i,\ k\leqslant m)$.

Поступила в редакцию
13.5.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний, М., Бюлл. Моск. ун-та (А), 1 : 3 (1937).
[2] А. Н. Колмогоров, Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изв. АН СССР, серия матем., **13**, 4 (1949), 281—300.
[3] В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, ГИТТЛ, 1949.
[4] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, 1953.
[5] И. С. Волков, О распределении сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний, Теория вероят. и ее примен., **III** 4 (1958), 413—429.

ON PROBABILITIES FOR EXTREME VALUES OF SUMS OF RANDOM VARIABLES DEFINED ON A HOMOGENEOUS MARKOV CHAIN WITH A FINITE NUMBER OF STATES

I. S. VOLKOV (MOSCOW)

(Summary)

This paper examines the probabilities for values of sums of random variables define on a homogeneous Markov chain with a finite number of states. These values are such tha their deviations from the smallest or largest possible value for each instant of time «n are bounded in their sum. By separating trajectorits in the random walk into classe defined by a proper method, regular components are picked out from the probabilitie under consideration and exact and asymptotic formulas are found (for $n \to \infty$) for eac of these components.

О СРЕДНЕМ ЧИСЛЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ НЕКОТОРОГО УРОВНЯ ВЫБОРОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОЦЕССА

В. А. ИВАНОВ

I. Заметка посвящена подсчету среднего числа пересечений некоторого уровня выбо рочными функциями вероятностного процесса.

В 1945 г. С. Райс в [1] указал формулу для среднего числа нулей (точек, где вы борочная функция обращается в нуль).

Затем, в 1951 г. В. И. Бунимович в [2] дал формулу для среднего числа пересечени произвольного уровня (этот результат можно найти также в [7], стр. 327—331). Наконец в работе [3] была предпринята не доведенная до конца попытка математически строго доказательства формулы Райса-Бунимовича.

Ниже дается строгий вывод этой формулы для вероятностных процессов одного класс

II. Рассмотрим действительную функцию $x(t)$, $t \in [0, T]$.

Введем следующие обозначения: $N_u(x(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T) \equiv N_u(x)$ — число пересечени уровня u функцией $x(t)$ в отрезке $[0, T]$, т. е. число точек $t \in [0, T]$, для которы $x(t) = u$ ($N_u(x)$ может принимать значение $+\infty$);

$$\varphi_{u \pm \Delta u}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x - u| \leqslant \Delta u, \\ 0, & \text{если } |x - u| > \Delta u; \end{cases}$$

$$N_u(\Delta u,\ x(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T) \equiv N_u(\Delta u,\ x) \equiv \int_0^T \frac{1}{2\Delta u} \varphi_{u \pm \Delta u}(x(t)) \cdot |x'(t)|\, dt.$$

Лемма 1. *Пусть $x(t)$ функция, имеющая непрерывную производную $x'(t)$ и удовл творяющая условиям*

$$x(0) \neq u, \quad x(T) \neq u, \quad N_0(x') < \infty.$$

Тогда

$$N_u(x) = \lim_{\Delta u \to 0} N_u(\Delta u, x). \qquad (1)$$

Доказательство. По предположению все точки пересечения уровня u функцией $x(t)$ составляют конечное множество $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Выберем около каждой точки окрестность $\delta_k = (t_k - \varepsilon_k, t_k + \varepsilon_k)$ такую, что в ней не содержится ни одного нуля производной функции $x'(t)$ кроме точки t_k, если $x'(t_k) = 0$.

Тогда в силу непрерывности функции $x(t)$ нижняя грань значений $|x(t) - u|$ для точек, входящих в дополнение к сумме окрестностей δ_k, есть положительное число α.

В каждом интервале $(t_k - \varepsilon_k, t_k)$, $(t_k, t_k + \varepsilon_k)$ функция $x(t)$ монотонна, поэтому, как легко видеть, при $\Delta u < \alpha$ выполняется равенство $N_u(\Delta u, x) = N_u(x)$, из которого вытекает (1). Приведем примеры, показывающие, что при меньших, чем в лемме 1, ограничениях формула (1) может оказаться неверной.

Пример 1. Построим функцию $x(t)$, производная $x'(t)$ которой непрерывна и для которой $\overline{\lim_{\Delta u \to 0}} N_0(\Delta u, x) > N_0(x)$. Для этого разобьем отрезок $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ на отрезки $[t_n, t'_{n+1}]$, $[t'_{n+1}, t_{n+1}]$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$t_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{T}{2}; \quad t'_n = \left(1 - \frac{3}{2^{n+1}}\right)\frac{T}{2}.$$

Длина отрезка $[t_n, t'_{n+1}]$ есть $\Delta_n = \frac{T}{2^{n+3}}$. Возьмем положительные числа β и γ и зададим $x'(t)$ следующим образом:

$$x'(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta\pi}{2^{n-2}T} \sin\left[\dfrac{\pi}{\Delta_n}(t - t_n)\right], & \text{если } t_n \leqslant t \leqslant t'_{n+1}, \\ \dfrac{(\beta+\gamma)\pi}{2^{n-2}T} \sin\left[\dfrac{\pi}{\Delta_n}(t - t_n)\right], & \text{если } t'_{n+1} \leqslant t \leqslant t_{n+1}, \\ t - \dfrac{T}{2}, & \text{если } \dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Функцию $x(t)$ определяем теперь так:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t x'(\tau)\, d\tau, \quad \text{где } x_0 = \gamma\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{4}{3}\gamma.$$

Нетрудно проверить, что эта функция при $\beta > 2\gamma$ обладает указанным выше свойством.

Пример 2. Если $x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)$, то

$$\lim_{\Delta u \to 0} N_0(\Delta u, x) < N_0(x),$$

так как левая часть написанного неравенства равна 1, а правая 2.

Лемма 2. *Пусть $x(t)$ абсолютно непрерывная функция, не равная тождественно ни в одном интервале из $[0, T]$. Тогда*

$$N_u(x) \leqslant \lim_{\Delta u \to 0} N_u(\Delta u, x) + 1. \qquad (2)$$

Доказательство. Разберем два случая: А) Пусть $N_u(x) < \infty$. Окружим точки пересечения $t_1, \ldots, t_N$, лежащие внутри $[0, T]$ непересекающимися окрестностями $(t_k - \varepsilon_k, t_k + \varepsilon_k)$.

Для достаточно малого Δu в силу предположений леммы

$$I_k = \int\limits_{t_k-\varepsilon_k}^{t_k+\varepsilon_k} \frac{1}{2\Delta u} \varphi_{u\pm\Delta u}(x(t)) \mid x'(t) \mid dt \geqslant 1$$

и (2) выполнено. В) Пусть $N_u(x) = \infty$. Возьмем произвольное $A > 0$ и выберем в (0, $N > A$ точек $t_1, \ldots, t_N$, в которых $x(t)$ пересекается с уровнем u. Применяя то построение, что и в п. А) получим

$$\varliminf_{\Delta u \to 0} N_u(\Delta u, x) \geqslant \varliminf_{\Delta u \to 0} \sum_{k=1}^{N} I_k \geqslant N > A,$$

т. е. предел слева бесконечен. Поэтому (2) верно.

III. Теперь рассмотрим вероятностный процесс $\{\xi_t,\ t \in F,\ F \supset [0, T]\}$ и среднее чи пересечений фиксированного уровня u выборочными функциями этого процесса отрезке $[0, T]$.

Лемма 3. *Пусть ξ_t вероятностный процесс, обладающий в отрезке $[0, T]$ следующ свойствами:*

1. *ξ_t с вероятностью 1 абсолютно-непрерывная функция;*
2. *с вероятностью 1 нет интервала, в котором $\xi_t \equiv u$.*
3. $$\varliminf_{\Delta u \to 0} \mathbf{M} N_u(\Delta u, \xi_t) < \infty.$$

Тогда

$$\mathbf{M} N_u(\xi_t) < \infty.$$

Доказательство. Учитывая лемму 2 и лемму Фату (см. [5] стр. 114), мож написать

$$\mathbf{M} N_u(\xi_t) \leqslant \mathbf{M}\{\varliminf_{\Delta u \to 0} N_u(\Delta u, \xi_t) + 1\} \leqslant \varliminf_{\Delta u \to 0} \mathbf{M} N_u(\Delta u, \xi_t) + 1 < \infty$$

и лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть ξ_t вероятностный процесс, обладающий в отрезке $[0, T]$ следующ свойствами:*

1. *ξ_t' с вероятностью 1 существует и непрерывна;*
2. *с вероятностью 1 $\xi_0 \neq u$, $\xi_T \neq u$;*
3. $\mathbf{M} N_0(\xi_t') < \infty$.

Тогда

$$\mathbf{M} N_u(\xi_t) = \varliminf_{\Delta u \to 0} \mathbf{M} N_u(\Delta u, \xi_t).$$

Доказательство. По лемме 1 с вероятностью 1

$$N_u(\xi_t) = \varliminf_{\Delta u \to 0} N_u(\Delta u, \xi_t).$$

Поэтому

$$\mathbf{M} N_u(\xi_t) = \mathbf{M} \varliminf_{\Delta u \to 0} N_u(\Delta u, \xi_t) = \varliminf_{\Delta u \to 0} \mathbf{M} N_u(\Delta u, \xi_t).$$

Перестановка предела и математического ожидания законна, так как интеграл, стоящ под знаком предела, мажорируется суммируемой функцией $N_0(\xi_t') + 1$ (см. [5], стр. 11

Теорема 1. *Пусть ξ_t — вероятностный процесс, обладающий в отрезке $[0, T]$ следу щими свойствами:*

1. *с вероятностью 1 существует и абсолютно непрерывна ξ_t';*
2. *с вероятностью 1 $\xi_0 \neq u$, $\xi_T \neq u$;*
3. *с вероятностью 1 нет интервала в $[0, T]$ в котором $\xi_t' \equiv 0$;*
4. $$\varliminf_{\Delta u \to 0} \mathbf{M} N_0(\Delta u, \xi_t') < \infty.$$

Тогда

$$\mathbf{M}N_u(\xi_t) = \lim_{\Delta u \to 0} \mathbf{M}N_u(\Delta u, \xi_t). \tag{3}$$

Доказательство. Условие 3 леммы 4 следует из леммы 3, которая верна вследствие предположений 1,3 и 4 теоремы (для процесса ξ_t' и уровня $u = 0$). Поэтому утверждение леммы 4 выполняется и (3) справедливо.

Пример 3. Будет построен вероятностный стационарный процесс, удовлетворяющий условиям 1—3 теоремы, для которого (3) не выполнено.

На отрезке $[0, T]$ зададим функцию $\varphi_k(t)$ обладающую следующими свойствами:

1. $$\frac{1}{2^{k+1}} < \varphi_k(t) < \frac{1}{2^k};$$

2. $\varphi_k''(t)$ существует и абсолютно непрерывна;

3. нет интервала в $[0, T]$, в котором $\varphi_k'(t) \equiv 0$.

Пусть процесс ξ_t с вероятностью $\frac{1}{2^k}$ совпадает с функцией $\varphi_k(t)$. Тогда $\mathbf{M}N_0(\xi_t) = 0$, так как с вероятностью 1 $N_0(\xi_t) = 0$. Для $\Delta u = \frac{1}{2^n}$

$$\mathbf{M}N_0(\Delta u, \xi_t) = 2^{n-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^k}{2^k} = \infty,$$

если для каждого k

$$\int_0^T |\varphi_k'(t)|\, dt = 2^k \text{ и } \mathbf{M}N_0(\Delta u, \xi_t) = 2^{n-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

если для каждого k

$$\int_0^T |\varphi_k'(t)|\, dt = 1.$$

Из построенного процесса ξ_t можно получить стационарный процесс η_t, обладающий интересующими нас свойствами. Для этого надо периодически продолжить ξ_t вне отрезка $[0, T]$ и положить $\eta_t = \xi_{t-\tau}$, где τ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, T]$.

Следствием теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_t,\ t \in (-\infty, \infty)\}$ *— сепарабельный гауссовский стационарный процесс со спектральной функцией* $F(\lambda)$, *удовлетворяющей условию* $\int \lambda^4 dF(\lambda) < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{M}N_u(\xi_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T) = T p_{\xi_t}(u)\, \mathbf{M}\{|\xi_t'|\}, \quad \text{где } p_{\xi_t}(x)$$

есть одномерная плотность распределения процесса ξ_t. (Предполагается, что гауссовский стационарный процесс ξ_t невырожденный и плотности $p_{\xi_t}(x)$ и $p_{\xi_t'}(y)$ существуют.)

В терминах корреляционной функции получаем:

$$\mathbf{M}N_u(\xi_t) = \frac{T}{\pi} \sqrt{-\frac{B''(0)}{B(0)}}\, e^{-\frac{u^2}{2B(0)}} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}N_0(\xi_t) = \frac{T}{\pi} \sqrt{-\frac{B''(0)}{B(0)}}.$$

Здесь $B(\tau) = \mathbf{M}\{\xi_t \xi_{t+\tau}\}$ корреляционная функция процесса ξ_t.) Эти формулы даны в работах [1] и [2].

Доказательство. Проверим выполнимость предпосылок теоремы 1. Стационарный сепарабельный вероятностный процесс ξ_t со спектральной функцией $F(\lambda)$ (см. [4], стр. 466), удовлетворяющей условию $\int \lambda^4 dF(\lambda) < \infty$, обладает с вероятностью 1 абсолютно непрерывной производной ξ_t' (см. [4], стр. 481). Производная ξ_t'' сепарабельного стационарного процесса ξ_t' существует с вероятностью 1 и ее можно выбрать так, что она будет измеримым процессом (см. [4], стр. 481). Процессы ξ_t и ξ_t' также измеримы по теореме 2.5 ([4], стр. 61). Для гауссовского процесса при любом t $\mathbf{P}\{\xi_t = u\} = 0$ и предположение 3 теоремы 1 выполнено.

Используя теорему о возможности перестановки интегралов (см. [5], стр. 145) и тот факт, что для стационарного гауссовского процесса одномерные распределения процесса и его производной в один и тот же момент t независимы (см. [6], стр. 236) получим

$$\lim_{\Delta u \to 0} \mathbf{M} N_0(\Delta u, \xi_t') = \lim_{\Delta u \to 0} \int_0^T \mathbf{M}\left\{\frac{1}{2\Delta u} \varphi_{0 \pm \Delta u}(\xi_t') \mid \xi_t'' \mid\right\} dt = T p_{\xi_t'}(0)\, \mathbf{M}\{\mid \xi_t'' \mid\}.$$

Поэтому условия теоремы выполняются и можно, подобно только что проделанному, написать

$$\mathbf{M} N_u(\xi_t) = \lim_{\Delta u \to 0} \mathbf{M} N_u(\Delta u, \xi_t) = T p_{\xi_t}(u)\, \mathbf{M}\{\mid \xi_t' \mid\},$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через $p_{\xi_t, \eta_t}(x, y)$ плотность совместного распределения случайных величин ξ_t и η_t. Имеет место несколько более общая

Теорема 3. *Пусть ξ_t — сепарабельный стационарный вероятностный процесс, обладающий следующими свойствами:*

1. $B(\tau) = \mathbf{M}\{\xi_t \xi_{t+\tau}\}$ *четыре раза дифференцируема, то есть* $B^{IV}(\tau)$ *существует*
2. $p_{\xi_0}(x)$ *и* $p_{\xi_T}(x)$ *непрерывны в точке* $x = u$, $p_{\xi_t'}(y)$ *непрерывна в точке* $y = 0$;
3. *плотности совместных распределений* $p_{\xi_t, \xi_t'}(x, y)$ *и* $p_{\xi_t', \xi_t''}(y, z)$ *не зависят от* t;
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \mid y \mid p_{\xi_t, \xi_t'}(x, y)\, dy$ *непрерывен по* x *в точке* $x = u$, $\int_{-\infty}^{\infty} \mid z \mid p_{\xi_t', \xi_t''}(y, z)\, dz$ *непрерывен по* y *в точке* $y = 0$.

Тогда

$$\mathbf{M} N_u(\xi_t) = T \int_{-\infty}^{\infty} \mid y \mid p_{\xi_t, \xi_t'}(u, y)\, dy.$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости теоремы 3, надо проверить выполнимость предпосылок теоремы 1. Но предпосылки 1, 2 и 3 уже проверялись при доказательстве теоремы 2. Необходимо только заметить, что для действительного стационарного процесса неравенство $\int \lambda^4 dF(\lambda) < \infty$ — вытекает из существования $B^{IV}(\tau)$ (см. [6], стр. 235). Используя условия 3 и 4 настоящей теоремы, можно написать

$$\lim_{\Delta u \to 0} \mathbf{M} N_0(\Delta u, \xi_t') = \lim_{\Delta u \to 0} \int_0^T \frac{1}{2\Delta u} \mathbf{M}\{\varphi_{0 \pm \Delta u}(\xi_t') \mid \xi_t' \mid\}\, dt =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \int_0^T \left[\frac{1}{2\Delta u} \int_{-\Delta u}^{\Delta u} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \mid z \mid p_{\xi_t' \xi_t''}(y, z)\, dz\right\} dy\right] dt = T \int_{-\infty}^{\infty} \mid z \mid p_{\xi_t', \xi_t''}(0, z)\, dz < \infty.$$

Поэтому предпосылки теоремы 1 выполнены и, проводя вычисления для величин ξ_t, ξ_t', аналогичные только что проделанным, убеждаемся в справедливости теоремы.

IV. Приведенные выше рассуждения применимы и к $[N_u(\xi_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T)]^n$. Поэтому верна

Теорема 4. *Пусть* ξ_t *— вероятностный процесс, удовлетворяющий следующим свойствам:*

1. *выполнены пункты* 1, 2 *и* 3 *теоремы* 1;
2. $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \mathbf{M}\,[N_0(\Delta u, \xi_t')]^n < \infty$.

Тогда

$$\mathbf{M}\,[N_u(\xi_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T)]^n = \lim_{\Delta u \to 0} \mathbf{M}\,[N_u(\Delta u,\ \xi_t)]^n.$$

В заключение автор выражает признательность Р. Л. Добрушину за внимание, оказанное автору при выполнении работы.

Поступила в редакцию
23.12.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. O. Rice, Mathematical Analysis of Random Noise, Bell System Technical Journal, **24**, 1 (1945), 46—156.
[2] В. И. Бунимович, Выбросы напряжения флюктуационных шумов, ЖТФ, **21**, 6 (1951), 625—628.
[3] А. П. Хусу, О некоторых встречающихся в технике функционалах, заданных на процессах. Вестник ЛГУ, 1 (1956), 91—93.
[4] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ, М., 1956.
[5] П. Халмош, Теория меры, ИИЛ, М., 1953.
[6] G. L. Doob, The Elementary Gaussian Processes, Ann. Math. Stat., **15**, 3 (1944), 229—282.
[7] В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Советское радио, М., 1951.

ON THE AVERAGE NUMBER OF INTERSECTIONS OF A LEVEL BY THE SAMPLE FUNCTIONS OF A STOCHASTIC PROCESS

V. A. IVANOV *(MOSCOW)*

(*Summary*)

A strict derivation is given of the formula for the average number of times, a fixed level is intersected by the sample functions of stochastic processes of some class.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ВЫБРОСА

В. А. ВОЛКОНСКИЙ

В данной заметке дается строгое обоснование некоторых известных утверждений относительно пересечений уровня стационарным (в узком смысле) случайным процессом x_t. Будем предполагать, что все траектории процесса x_t непрерывны. Мы говорим, что в момент t происходит пересечение уровня a снизу вверх (или сверху вниз), если $x_t = a$ и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x_{t+\delta} \geqslant a$ и $x_{t-\delta} \leqslant a$ для всех $\delta \in (0, \varepsilon)$. Пересечения фиксированного уровня снизу вверх образуют стационарный поток событий в смысле работы [1].

Поток называется ординарным, если вероятность появления двух событий за время t есть $o(t)$ при $t \to 0$. Математическое ожидание μ числа событий за единицу времени

называется интенсивностью потока. Обозначим $\eta(s, t)$ — число пересечений уровня a снизу вверх за отрезок времени $[s, t]$.

Если $\mu = \boldsymbol{M}\,\eta(0, 1) < \infty$, то согласно [1] (§ 9) существует условное распределение $G(t)$ момента следующего пересечения снизу вверх при условии, что в начальный момент произошло пересечение снизу вверх, которое определяется следующим образом:

$$G(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{H(\Delta, t)}{w(\Delta)}, \tag{1}$$

где

$$w(\Delta) = \boldsymbol{P}\{\eta(0, \Delta) \geqslant 1\} \text{ и } H(\Delta, t) = \boldsymbol{P}\{\eta(-\Delta, 0) \geqslant 1,\ \eta(0, t) \geqslant 1\}.$$

Отрезок времени между пересечением уровня a снизу вверх и следующим за ним пересечением сверху вниз называется выбросом. Вполне аналогично доказательству существования предела (1) доказывается существование предела

$$F(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\overline{H}(\Delta, t)}{w(\Delta)}, \tag{2}$$

где

$$H(\Delta, t) = \boldsymbol{P}\{\eta(-\Delta, 0) \geqslant 1,\ \overline{\eta}(0, t) \geqslant 1\},$$

и $\overline{\eta}(s, t)$ — число пересечений сверху вниз на отрезке $[s, t]$, т. е. условного распределения длины выброса при условии, что начало выброса совпадает с нулевым моментом времени.

Поток пересечений при $\mu < \infty$ ординарен (см. ниже, лемма 1) и поэтому $w(\Delta) \sim \mu\Delta$ при $\Delta \to 0$.

Легко проверить, что пределы в (1) и (2) равны соответственно

$$1 + \frac{1}{\mu} D^+ V(t) \text{ и } 1 + \frac{1}{\mu} D^+ \overline{V}(t),$$

где

$$V(t) = \mathbf{P}\{\eta(0, t) = 0\}, \quad \overline{V}(t) = \mathbf{P}\{\overline{\eta}(0, t) = 0, \quad x_0 > a\},$$

и $D^+ V(t)$ означает правую производную от $V(t)$. Поэтому

$$\int_0^\infty x dG(x) = \int_0^\infty (1 - G(x))\, dx = \frac{1}{\mu} V(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\mu},$$

$$\int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx = \frac{1}{\mu} \overline{V}(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\mathbf{P}(x_0 > a)}{\mu}.$$

Эти величины естественно называть средним промежутком между началами (соседних) выбросов и средней длительностью выброса.

Обозначим $\eta_x(0, T)$ — число пересечений уровня снизу вверх за время $[0, T]$, после которых следующее такое пересечение происходит менее чем через время x, а через $\hat{\eta}_x(0, T)$ — число выбросов с началом на отрезке времени $[0, T]$, и с длиной, меньшей чем x.

Теорема. *Если x_t — эргодический процесс, и $\mu = \mathbf{M}\,\eta(0, 1) < \infty$, то с вероятностью 1 при $T \to \infty$*

$$\frac{1}{T}\eta(0, T) \to \mu, \quad \frac{\eta_x(0, T)}{\eta(0, T)} \longrightarrow G(x), \quad \frac{\hat{\eta}_x(0, T)}{\eta(0, T)} \longrightarrow F(x).$$

Доказательство. Обозначим

$$\beta(t, \Delta, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta(t - \Delta, t) \geqslant 1,\ \eta(t, t + x) = 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

$$\gamma(t, \Delta, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta(t - \Delta, t) \geqslant 1,\ \overline{\eta}(t - \Delta, t + x) = 0,\ x_t > a. \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^T \eta(t - 1, t)\, dt \leqslant \eta(0, T) \leqslant \int_0^{T+1} \eta(t - 1, t)\, dt \tag{3}$$

для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < \Delta < \min(\varepsilon, x)$

$$\int_0^T \beta(t, \Delta, x+\varepsilon)\,dt \leqslant [\eta(0, T) - \eta_x(0, T)]\,\Delta \leqslant \int_0^{T+\Delta} \beta(t, \Delta, x)\,dt, \tag{4}$$

$$\int_0^T \gamma(t, \Delta, x+\varepsilon)\,dt \leqslant [\eta(0, T) - \hat{\eta}_x(0, T)]\,\Delta < \int_0^{T+\Delta} \gamma(t, \Delta, x)\,dt. \tag{5}$$

ак как $\mathbf{M}\,\eta_i(t-1, t) = \mu$, $\mathbf{M}\,\beta(t, \Delta, x) = V(x) - V(x+\Delta)$ и $\mathbf{M}\,\gamma(t, \Delta, x) = \overline{V}(x) - \overline{V}(x+\Delta)$, то в силу эргодичности процесса получаем из (3) — (5), что с вероятностью 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\eta_i(0, T)}{T} = \mu, \tag{6}$$

$$V(x+\varepsilon) - V(x+\varepsilon+\Delta) \leqslant \Delta\left[1 - \varlimsup_{T\to\infty} \frac{\eta_x(0, T)}{T}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \Delta\left[1 - \varliminf_{T\to\infty} \frac{\eta_x(0, T)}{T}\right] \leqslant V(x) - V(x+\Delta), \tag{7}$$

$$\overline{V}(x+\varepsilon) - \overline{V}(x+\varepsilon+\Delta) \leqslant \Delta\left[1 - \varlimsup_{T\to\infty} \frac{\hat{\eta}_x(0, T)}{T}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \Delta\left[1 - \varliminf_{T\to\infty} \frac{\hat{\eta}_x(0, T)}{T}\right] \leqslant \overline{V}(x) - \overline{V}(x+\Delta). \tag{8}$$

еля неравенства (7) и (8) на $\mu\,\Delta$ и устремляя $\Delta \to 0$, имеем почти наверное

$$1 + \frac{1}{\mu} D^+ V(x) = G(x) \leqslant \varliminf_{T\to\infty} \frac{\eta_x(0, T)}{\mu T} \leqslant \varlimsup_{T\to\infty} \frac{\eta_x(0, T)}{\mu T} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{\mu} D^+ V(x+\varepsilon) = G(x+\varepsilon), \tag{9}$$

$$1 + \frac{1}{\mu} D^+ \overline{V}(x) = F(x) \leqslant \varliminf_{T\to\infty} \frac{\hat{\eta}_x(0, T)}{\mu T} \leqslant \varlimsup_{T\to\infty} \frac{\hat{\eta}_x(0, T)}{\mu T} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{\mu} D^+ \overline{V}(x+\varepsilon) = F(x+\varepsilon). \tag{10}$$

Докажем, что если правая производная от некоторой функции $f(x)$ не убывает, то на непрерывна справа. Если это не так, то для некоторых x_0 и $\varepsilon > 0$ при $x > x_0$

$$D^+ f(x) > D^+ f(x_0) + \varepsilon.$$

Отсюда вытекало бы (см., например, [2], п. 112), что для $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > D^+ f(x_0) + \varepsilon,$$

то невозможно.

Следовательно, функция $D^+ V(x)$ и $D^+ \overline{V}(x)$ (а значит $G(x)$ и $F(x)$) непрерывны права. Устремляя $\varepsilon \to 0$ в неравенствах (9) и (10), получаем с вероятностью 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\eta_x(0, T)}{\mu T} = G(x), \quad \lim_{T\to\infty} \frac{\hat{\eta}_x(0, T)}{\mu T} = F(x).$$

Из этих соотношений и равенства (6) вытекает утверждение теоремы.

Задача доказать эту теорему была поставлена Р. Л. Добрушиным на семинаре по приложениям теории вероятностей к радиотехнике.

Лемма 1*. *Если два события не происходят одновременно и интенсивность пото конечна, то поток ординарен.*

Доказательство. Обозначим: $\eta(s, t)$ — число событий за отрезок време $[s, t]$, $N(\delta, t)$ — число пар событий на отрезке $[0, t]$, расстояние между которы (в паре) не превосходит δ, m — минимум расстояния между двумя событиями на отрез $[0,1]$.

Пусть поток не ординарен. Тогда существует последовательность $\Delta_k \to 0$ и чис $p > 0$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\eta(0, \Delta_k) \geqslant 2\} \geqslant p\Delta_k.$$

Пусть n настолько велико, что

$$\sum_{k>n} \mathbf{P}\{\eta(0, 1) = n\}\, k < \frac{p}{4}.$$

Так как $N(\delta, 1) \leqslant \eta(0, 1)$, то $\mathbf{M}N(\delta, 1) \leqslant \frac{p}{4} + n\mathbf{P}\{N(\delta, 1) > 0\}$.

Кроме того, для $\Delta_k \leqslant \frac{1}{4}$

$$\mathbf{M}N(\Delta_k, 1) \geqslant \left[\frac{1}{\Delta_k}\right] \mathbf{M}N(\Delta_k, \Delta_k) \geqslant \left[\frac{1}{\Delta_k}\right] \mathbf{P}\{\eta(0, \Delta_k) \geqslant 2\} \geqslant \frac{p}{2}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(m \leqslant \Delta_k) = \mathbf{P}\{N(\Delta_k, 1) > 0\} \geqslant \frac{p}{4n} > 0.$$

Это противоречит очевидному равенству

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(m \leqslant \Delta_k) = 0.$$

Среднее число μ пересечений уровня может быть подсчитано по известным форм лам (см., например, [3], [4]). Поэтому эта лемма дает эффективный критерий ордина ности потока пересечений.

Поступила в редакцию
3. 6. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труд Математического института имени Стеклова АН СССР, М., 1956.
[2] Ж. Ж. Дела Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно-малых. М.— Л., I, 193
[3] С. Райс, Теория флуктуационных шумов. Сборник «Теория передачи электрич ческих сигналов при наличии помех», ИЛ., 1953
[4] В. Иванов, О среднем числе пересечений некоторого уровня выборочными фун циями вероятностного процесса. Теория вероят. и ее прим., V, 3 (1960), 358—36

AN ERGODIC THEOREM ON THE DISTRIBUTION OF THE DURATION OF FADES

V. A. VOLKONSKI (MOSCOW)

(Summary)

The duration of fades of a stationary process is the time interval between the crossin of a fixed level from below going upwards to the next crossing of this level from abov going downwards.

It follows from [1], that the conditional distribution $F(x)$ of the duration of fade exists if the crossing from below going upwards was at the origin of the time axis. It proved in the paper that for an ergodic process the relative number of fades of duratio less than X on the time interval [o, T] tends to $F(x)$ as $T \to \infty$.

* Доказательство принадлежит Р. Л. Добрушину.

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАЙЕРЛСА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

И. М. СОБОЛЬ

Введение

При некоторых предположениях (в односкоростном приближении) определение критичности ядерного реактора сводится к нахождению первого собственного значения, интегрального уравнения Пайерлса:

$$n(P) = \lambda \iiint_G \frac{\beta(P') \exp\left\{-|P-P'| \int_0^1 \alpha[tP + (1-t)P']\,dt\right\} n(P')\,dP'}{4\pi |P-P'|^2}. \qquad (1)$$

Если $\lambda_1 = 1$, то реактор G с параметрами $\alpha(P)$ и $\beta(P)$ является критическим. В этом случае собственная функция $n_1(P)$ представляет собой плотность нейтронов.

В статье В. С. Владимирова [1] изложен метод Монте-Карло для решения интегральных уравнений. В [2] показано, что этот метод может быть использован для нахождения первого собственного значения уравнения (1). Основная цель настоящей работы — на конкретном примере оценить эффективность метода.

Следующие три момента в работе новые и, возможно, представляют интерес с точки зрения практического применения методов Монте-Карло:

а) Рассматривается бесконечный цилиндрический реактор G. В этом случае (см. § 1) уравнение (1) сводится к уравнению того же типа на плоскости, однако плоское ядро оказывается значительно сложнее ядра (1) и выражается в форме интеграла по параметру. Метод Монте-Карло позволяет легко преодолеть эту трудность и считать интегралы по параметру заодно с итерациями.

б) Для нахождения λ_1 и $n_1(P)$ в [1] предлагается строить разные блуждания. Оказывается, для приближенного определения собственной функции можно использовать те же блуждания, при помощи которых находится λ_1 *.

в) Для ряда величин сосчитаны дисперсии. С их помощью можно найти вероятные ошибки вычислений и оценить эффективность метода. Анализ дисперсий позволил обнаружить недостаток рассматриваемого метода (§ 3, п. 4).

Насколько известно автору, в литературе нет примеров расчета собственной функции интегрального уравнения методом Монте-Карло.

§ 1. Преобразование исходного уравнения

Пусть G — бесконечный цилиндр с образующими параллельными оси z, а D — проекция G на плоскость xy. Векторы на плоскости xy будем обозначать через Q:

$$P = Q + z\mathbf{k}.$$

Если $\alpha = \alpha(Q)$ и $\beta = \beta(Q)$, то и $n = n(Q)$. Уравнение (1) можем в этом случае записать в виде

$$n(Q) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dz \iint_D \frac{(Q') \exp\left\{-\sqrt{|Q-Q'|^2 + (z-z')^2} \int_0^1 \alpha[tQ + (1-t)Q']\,dt\right\} n(Q')\,dQ'}{4\pi[|Q-Q'|^2 + (z-z')^2]}$$

или, после очевидных преобразований:

---

* Этот пример иллюстрирует, по-видимому, общее для всех методов Монте-Карло положение: нужно стремиться извлечь из каждого блуждания больше информации.

$$n(Q) =$$

$$= \lambda \int_0^\infty d\zeta \iint_D \frac{\beta(\theta') \exp\left\{-\sqrt{|Q-Q'|^2+\zeta^2} \int_0^1 \alpha[tQ+(1-t)Q']\,dt\right\} n(Q')\,dQ'}{2\pi[|Q-Q'|^2+\zeta^2]}.$$

В последнем уравнении сделаем замену переменной

$$\zeta = |Q-Q'| s (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

При этой замене полупрямая $0 \leqslant \zeta < \infty$ переходит в интервал $0 \leqslant s < 1$, и уравнение принимает вид

$$n(Q) = \lambda \iint_D \beta(Q') \varkappa(Q, Q') n(Q')\,dQ', \quad (4)$$

где ядро $\varkappa(Q, Q')$ симметрично:

$$\varkappa(Q, Q') =$$

$$= \frac{1}{2\pi|Q-Q'|} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{|Q-Q'| \int_0^1 \alpha[tQ+(1+t)Q']\,dt}{\sqrt{1-s^2}}\right\} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (5)$$

Полученное уравнение на плоскости относится к тому же типу, что уравнение (1) в пространстве: ядро имеет особенность вида $r^{-(d-1)}$, где d — размерность пространства. Для вычисления λ_1 и $n_1(P)$ согласно [1], можно применять метод Келлога *

§ 2. Построение блуждания

Для того чтобы одновременно с интерациями вычислялись интегралы, входящие в (3), рассмотрим блуждание точки $P = Q + s\mathbf{k}$ в единичном цилиндре $G_1 = D \times [0, 1]$. Начальную точку $P_0 = Q_0$ выбираем в плоскости xy; плотность вероятностей $f(Q_0) > 0$ — произвольная.

Чтобы определить закон перехода из точки P_i в точку P_{i+1} введем цилиндрические координаты (r, θ, s) с центром в Q_i.

Тогда $Q = Q_i + r\omega$, где $\omega = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$. Полагая $\alpha(Q) \equiv 0$ вне области D, построим функцию

$$\zeta(P_i, \theta) = 1 - \exp\left\{-\int_0^\infty \alpha(Q_i + \tau\omega)(1-s_i^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\tau\right\}.$$

Плотность вероятностей перехода из P_i в P зададим формулой

$$f(P_i, P) = \frac{\alpha(Q) \exp\left\{-\int_0^r \alpha(Q_i+\tau\omega)(1-s_i^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\tau\right\}}{2\pi\sqrt{1-s_i^2}\,|Q-Q_i|\,\zeta(P_i, \theta)}. \quad (6)$$

---

* Ниже используются следующие обозначения: $\varphi_0(Q)$ — произвольно задаваемая начальная функция; $\varphi_k(Q)$—ее k-ая итерация:

$$\varphi_k(Q) = \iint_D \beta(Q') \varkappa(Q, Q') \varphi_{k-1}(Q')\,dQ',$$

$$(\varphi_k, \varphi_0) = \iint_D \beta(Q) \varphi_k(Q) \varphi_0(Q)\,dQ.$$

Последовательные приближения к λ_1 определяются по формуле:

$$\lambda_{(k)} = (\varphi_k, \varphi_0)/(\varphi_{k+1}, \varphi_0).$$

Формула (4) аналогична соответствующей формуле в [2] и легко реализуется, если метить, что

$$f(P_i, P)\,dP = \frac{ds}{1}\,\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{d\left[1-\exp\left\{-\int_0^r \alpha(Q_i+\tau\omega)(1-s_i^2)^{\frac{1}{2}}\,d\tau\right\}\right]}{\zeta(P_i,\theta)}.$$

Составим функцию

$$Z_k = \varphi_0(Q_k)\prod_{i=1}^{k}\frac{\beta(Q_i)}{\alpha(Q_i)}\,\zeta(P_{i-1},\theta_{i-1}), \qquad (5)$$

θ_{i-1} — направление из точки Q_{i-1} в Q_i, и пусть

$$M_k = Z_k\beta(Q_0)\varphi_0(Q_0)/f(Q_0). \qquad (6)$$

евидно, Z_k и M_k функции случайной траектории $P_0 \to P_1 \to \cdots \to P_k$, плотность роятностей которой равна $f(Q_0)f(P_0, P_1)\ldots f(P_{k-1}, P_k)$. Поэтому математическое ожи-ание

$$\mathbf{E}(M_k) = \int\int\cdots\int M_k f(Q_0) f(P_0, P_1)\ldots f(P_{k-1}, P_k)\,dP_0\ldots dP_k = (\varphi_k, \varphi_0).$$

сюда следует, что при больших N (N — число испытаний)

$$(\varphi_k, \varphi_0) \approx \frac{1}{N}\sum_{(N)} M_k.$$

Выделим теперь в D произвольную область $D_p \subseteq D$, и пусть $\chi_p(Q_0)$ — характеристическая функция этой области. Легко сосчитать, что

$$\mathbf{E}(Z_k\chi_p) = \int\int\cdots\int Z_k\chi_p(Q_0) f(Q_0)\ldots f(P_{k-1}, P_k)\,dP_0\ldots dP_k = \int\int_{D_p}\varphi_k(Q_0) f(Q_0)\,dQ_0.$$

от результат позволяет вычислять средние значения функции $\varphi_k(Q)$ по любой об-сти D_p:

$$\varphi_k(D_p) = \frac{\int\int_{D_p}\varphi_k(Q) f(Q)\,dQ}{\int\int_{D_p} f(Q)\,dQ} = \frac{\mathbf{E}(Z_k\chi_p)}{\mathbf{E}(\chi_p)}.$$

Практическое правило: если среди всех N сосчитанных блужданий N_p начинались из-асти D_p, то

$$\varphi_k(D_p) \approx \frac{1}{N_p}\sum_{(N_p)} Z_k. \qquad (7)$$

§ 3. Пример

Пусть G — бесконечный однородный круглый цилиндр со следующими параметрами: диус $R = 2{,}5$; $\alpha(Q) = 1$; $\beta(Q) = 1$.

1. Считались 6 вариантов, различающихся начальными функциями $\varphi_0(r)$ или распре-лениями начальной точки $f(Q_0)$*. (Здесь r — расстояние от оси цилиндра, которая при-та за координатную ось z).

* Произвольная функция $f(Q_0)$ в построенном блуждании (§ 2) соответствует одно-ному методу «существенной выборки» (importance sampling [4]). Естественно ожидать, результаты, сосчитанные с разными $f(Q_0)$, могут быть использованы для взаимной ррректировки. Однако методы такой корректировки (кроме простого сопоставления) ору не известны. Пример: допустим, что для $\mathbf{E}(\xi)$ получены два значения c_1 и c_2 $< c_2$) с одинаковой оценкой ошибок $\delta_1 \approx \delta_2 \approx \delta$. Из неравенств $|\mathbf{E}(\xi) - c_1| \leqslant \delta$ и $(\xi) - c_2| \leqslant \delta$ следует более сильное неравенство $c_2 - \delta \leqslant \mathbf{E}(\xi) \leqslant c_1 + \delta$, которое дает более узкие границы для $\mathbf{E}(\xi)$ при одном и том же δ, чем больше разность $- c_1 \leqslant 2\delta$.

Вариант	A	B	C	D	B'	C'
$\varphi_0(r)$	1	$1-(r/R)^2$	e^{-r^2}	$1-0{,}195r^{3/2}$	$1-(r/R)^2$	e^{-r^2}
$f(r_0)$	$1/2\ \pi R r_0$				$1/\pi R^2$	

Все варианты считались по одним и тем же псевдослучайным числам $\{\gamma_k\}$ (см. [3 при $\gamma_0 = 1$. Число испытаний $N = 900$, число приближений $n = 4$.

Нетрудно заметить, что несколько вариантов с разными $\varphi_0(P)$ и общим законом $f($ можно считать одновременно по одним и тем же блужданиям (ср. со сноской на стр.

Области D_p представляли собой 8 колец вида $r_{p-1} \leqslant r < r_p$, где $r_p = 0;\ 0{,}4;$ 1,0; 1,3; 1,6; 1,9; 2,2; 2,5. Начальная функции варианта D подобрана эмпирическ весьма грубо сглаживая результаты варианта B, который считался первым. Продолж тельность счета на машине «Стрела — 1» — приблизительно $0{,}003\ Nn$ минут. Значе M_k для варианта C' по ошибке не были выданы.

2. Результаты. В таблице 1 приведены относительные стандартные отклонения (ко фициенты вариации) некоторых величин:

$$v(\xi) = \sqrt{\mathbf{D}(\xi)}/\mathbf{E}(\xi) \approx \sqrt{N \sum_{(N)} \xi^2 \left(\sum_{(N)} \xi\right)^{-2} - 1},$$

сосчитанные при $N = 900$ (первая цифра устанавливается уже при $N \sim 300$). Как извест вероятная относительная ошибка $\mathbf{E}(\xi)$ равна $0{,}67\ v(\xi) N^{-\frac{1}{2}}$.

Таблица

ξ	$Z_1\chi_1$	$Z_1\chi_2$	$Z_1\chi_3$	$Z_1\chi_4$	$Z_1\chi_5$	$Z_1\chi_6$	$Z_1\chi_7$	$Z_1\chi_8$	M_1	M_2	M_3	M
A	2,2	2,9	2,9	3,1	3,0	3,4	3,4	4,1	0,63	0,68	0,76	0
B	2,5	3,3	3,2	3,5	3,4	4,0	4,1	5,0	0,70	0,79	0,90	0
C	3,3	4,3	4,4	4,7	4,9	6,5	7,0	7,4	1,3	1,5	1,6	1
D	2,4	3,2	3,1	3,4	3,3	3,7	3,8	4,6	0,56	0,66	0,76	0
B'	6,1	5,3	3,6	3,7	3,2	3,2	3,2	3,6	0,95	1,0	1,1	1
C'	7,2	7,8	4,7	4,9	4,6	5,0	5,0	6,0	—	—	—	

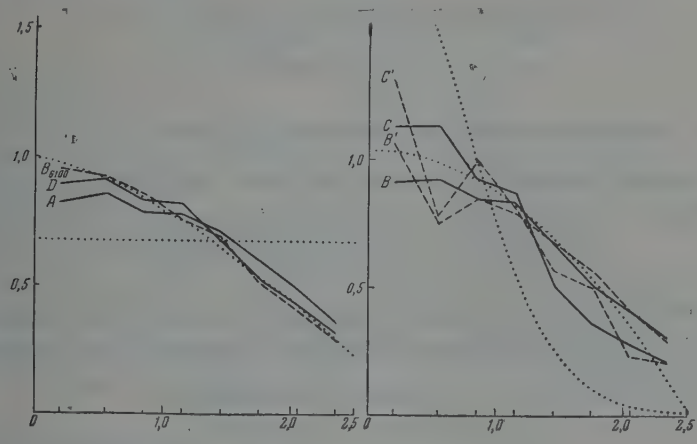
В таблице 2 приведены значения $\lambda_{(k)}^{(N)}$ — это k-ые приближения, сосчитанные по ре тата там N испытаний. Ясно, что третья цифра $\lambda_{(k)}$ еще не установилась.

Таблица

k \ N	300	600	900	300	600	900	300	600	9
	A			B			C		
1	1,216	1,206	1,190	1,147	1,147	1,143	1,369	1,349	1
2	1,203	1,188	1,189	1,181	1,204	1,192	1,288	1,352	1
3	1,206	1,186	1,182	1,214	1,173	1,182	1,200	1,115	1

k \ N	D			B_1		
1	1,156	1,152	1,142	1,201	1,188	1,182
2	1,176	1,190	1,183	1,172	1,207	1,200
3	1,204	1,170	1,175	1,180	1,145	1,164

На чертеже нанесены начальные функции $\varphi_0(r)$ (точечные кривые) и четвертые итерации φ_4. Значения $\varphi_4(D_p)$ отнесены к точкам $r_{p+\frac{1}{2}} = 0{,}5\,(r_p + r_{p+1})$. Нормировка: $\varphi_k\left(r_{p+\frac{1}{2}}\right) = \text{const}$ (одна и та же постоянная для всех кривых).



Легко видеть, что в варианте D начальная функция воспроизводится значительно лучше, чем в других вариантах.

3. Контроль. В целях контроля испытания по варианту B были продолжены до $N = 6100$. Соответствующая линия на чертеже обозначена B_{6100}. Полученные значения $\lambda_{(k)}^{(N)}$:

k \ N	900	1700	2500	3400	4300	5200	6100
1	1,143	1,173	1,180	1,181	1,181	1,183	1,185
2	1,192	1,180	1,182	1,178	1,183	1,184	1,183
3	1,182	1,180	1,189	1,188	1,187	1,182	1,180

Позволяют считать $\lambda_1 = 1{,}18$. Вероятная ошибка при $N = 6100$ около 1%. Это хорошо согласуется со значением 1,17, полученным вариационным методом в третьем приближении [5].

4. Некоторые замечания. При помощи данных таблицы 1 можно анализировать погрешности (сравнивать варианты, определять значения N, необходимые для достижения данной точности и др.). Отметим, что погрешности всех сосчитанных величин не превосходят их 95% уровней, т. е. величины $2vN^{-\frac{1}{2}}$.

Нетрудно заметить, что функции φ_4 в вариантах A, B, C и D имеют неровности одинакового характера. Объясняется это тем, что эти варианты считались по одним и тем же блужданиям. В вариантах B' и C' неровности уже другие.

Значения $v(M_k)$ растут с ростом k; это согласуется с качественной оценкой [2].

Сопоставляя значения v для вариантов A, B и D, легко убедиться в том, что уточнение $\varphi_0(Q)$, вообще говоря, не уменьшает дисперсии. Выигрыш получается только за счет ускорения сходимости последовательных приближений, а статистическая ошибка остается того же порядка, даже если $\varphi_0(Q) \approx n_1(Q)$. Это, конечно, недостаток рассматриваемого метода. В настоящее время успешно ведется работа по реализации блужданий, свободных от указанного недостатка.

5. Добавление: формулы счета (вариант B).

Начало испытания:

$$r_0 = \gamma R,\ x_0 = r_0\ y_0 = 0;\ u_0 = 1;\ m = 2R\beta r_0\,[1 - (r_0/R)^2].$$

Шаг номер $k+1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$):

$$s_k = \gamma,\ A_k = x_k \cos\theta_k + y_k \sin\theta_k;\ \rho_k = -A_k + \sqrt{A_k^2 + R^2 - r_k^2};$$

$$\zeta_k = 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha\rho_k}{\sqrt{1-s_k^2}}\right\},\ l_k = -\frac{\sqrt{1-s_k^2}}{\alpha}\ln(1-\gamma\zeta_k);$$

$$x_{k+1} = x_k + l_k\cos\theta_k;\ y_{k+1} = y_k + l_k\sin\theta_k;\ r_{k+1}^2 = x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2;$$

$$u_{k+1} = u_k\zeta_k\beta/\alpha;\ Z_{k+1} = u_{k+1}[1 - (r_{k+1}/R)^2];\ M_{k+1} = mZ_{k+1}.$$

Выдача:

$$N;\ N_p;\ \sum_{(N)} M_{k+1};\ \sum_{(N)} M_{k+1}^2;\ \sum_{(N_p)} Z_{k+1};\ \sum_{(N_p)} Z_{k+1}^2.$$

Здесь числа γ написаны без индексов, имея в виду, что каждое число $\{\gamma_k\}$ используется один раз. Синус и косинус угла θ_k, равномерно распределенного на $[0, 2\pi)$, вычисляли по методу Неймана [6].

ρ_k — расстояние от точки Q_k до границы по направлению θ_k.

M_k — счетное отличается множителем $1/\pi$ от M_k в § 2.

Поступила в редакцию
12.3.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Владимиров, О применении метода Монте-Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения, Теория вероят. и ее примен., **I**, 1 (1956), 113—13

[2] В. С. Владимиров, И. М. Соболь, Расчет наименьшего характеристического числа уравнения Пайерлса методом Монте-Карло, Вычислительная математика, сб. 3, Изд-во АН СССР (1958), 130—137.

[3] И. М. Соболь, Псевдослучайные числа для машины «Стрела», Теория вероят. ее примен., **III**, 2 (1958), 205—211.

[4] H. Kahn, Random sampling (Monte Carlo) techniques in neutron attenuation problems II, Nucleonics, 6 (1950), 60—65.

[5] Ф. Ф. Михайлус, Применение вариационного метода к расчету критического размера цилиндрического реактора, Сборник «Некоторые математические задачи нейтронной физики» под ред. Е. С. Кузнецова, М., 1959.

[6] J. Neumann, Various techniques used in connection with random digits, N. B. Applied math. series, 12 (1951), 36—38.

ON THE SOLUTION OF PEIERLS' INTEGRAL EQUATION BY THE MONTE CARLO METHOD

I. M. SOBOL (MOSCOW)

(Summary)

The random walks used in [1] to evaluate the least eigenvalue of an integral equation can be used at the same time for computing the first eigenfunction.

In the case of an infinite cylindrical region equation (1) is transformed into (2). The computation of the kernel (3) is performed simultaneously with iterations. A numerical example shows that in general the variance does not decrease when the initial function is improved.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА КАФЕДРЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

(октябрь–декабрь 1959 г.)

SUMMARY OF PAPERS

PRESENTED AT THE SESSIONS OF THE PROBABILITY RESEARCH SEMINAR MOSCOW UNIVERSITY

(October–December 1959)

Заседание 21 октября.

Клосс Б. М. Предельные распределения на локально компактных абелевых группах (Kloss B. M. Limit Distributions on Locally Compact Abel Groups). Содержание доклада будет опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения».

Добрушин Р. Л., Некоторые вопросы теории информации (Dobrushin R. L., Some Problems of Information Theory).

1. Как и обычно в теории информации, канал связи задается пространствами (X, S_X), $(\widetilde{X}, S_{\widetilde{X}})$ сигналов на входе и выходе канала, переходными вероятностями $\mathbf{P}(X, B)$ и ограничением V на совместное распределение на пространстве $(X \times D, S_X \times S_{\widetilde{X}})$. Через $\widetilde{\xi}_p$ будем обозначать случайную величину такую, что

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_p \in B \mid \xi = x\} = \mathbf{P}(x, B).$$

Пропускная способность канала равна тогда

$$c = \sup_{\xi} I(\xi, \widetilde{\xi}_p),$$

где верхняя грань берется по парам, удовлетворяющим условиям V. Теорема Шеннона состоит, грубо говоря, в том, что при $N > 2^c$ невозможно ни при каком выборе метода кодирования и декодирования передать по каналу N сообщений и при $N < 2^c$ это можно в некотором асимптотическом смысле.

Предположим теперь, что нам не заданы точно параметры канала, а известны лишь некоторые ограничения на них, т. е. задано множество W каналов $(\mathbf{P}, V)$. Положим

$$c = \sup_{\xi} \inf_{P \in W} I(\xi, \widetilde{\xi}_p),$$

$$\overline{c} = \inf_{P \in W} \sup_{\xi} I(\xi, \widetilde{\xi}_p) = \inf_{P \in W} c(W).$$

Оставим вопрос о том, при каких N возможна передача N сообщений таким образом, чтобы методы кодирования и декодирования были едиными для всех каналов из W, так что отсутствующие сведения о параметрах канала не используются при передаче. Естественно предположить, что это возможно при $N < 2^{\underline{c}}$ и невозможно при $N > 2^{\overline{c}}$. Соответствующая теорема оказывается верной для однородных каналов без памяти, а также в некоторых иных интересных случаях. В то же врямя можно привести пример неоднородного канала без памяти, когда она неверна. Так как разность $\overline{c} - \underline{c}$ характеризует выигрыш, получаемый от наличия точных сведений о параметрах канала, естественно исследовать вопрос о том, когда $\underline{c} = \overline{c}$. Оказывается, в частности, что это так, если рассматривать однородные каналы без памяти с выпуклым множеством матриц.

2. Рассмотрим канал связи, в котором в каждый момент времени на входе доступны некоторые сведения о состоянии канала и сигнале на выходе в предыдущие моменты времени. Используя одну идею Шеннона, можно свести канал с обратной связью к каналу без обратной связи, но с расширенным множеством состояний на входе. В связи с этим можно поставить задачу о вычислении пропускной способности некоторых каналов с обратной связью.

3. Рассмотрим простейший бинарный симметричный канал без памяти. Тогда, как отметил Хемминг, минимальная вероятность ошибки при передаче сообщений по каналу

длины n не может быть меньше, чем

$$P_n(N) = \sum_{m=k+1}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где p — вероятность ошибки в передаче отдельного символа и k определяется из соотношения

$$\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{k} C_n^m \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{k+1} C_n^m.$$

Оказывается, что та же оценка верна и для передачи с обратной связью. Поэтому результатов Элайса следует, что при достаточно больших скоростях передачи информ ции обратная связь не улучшает асимптотику минимальной вероятности ошибки. Эт результат может быть распространен и на более общие каналы.

Заседание 28 октября.

Большев Л. Н. Обзор некоторых результатов, полученных в дипломных ра тах по математической статистике (кафедра теории вероятностей МГУ, 1959 (Bolshev L. N., A Summary of Some Results Found in Under-graduate Theses on Mat matical Statistics).

В данном сообщении освещены лишь некоторые результаты дипломных работ математической статистике, выполненных под руководством автора этого обзора. Поэто предлагаемый доклад следует рассматривать как отчет о работе автора, а не как обз наиболее важных работ по математической статистике, выполненных на кафедре теор вероятностей МГУ.

I. Интервальные оценки линейных функций способом наименьших квадратов. Усл вимся векторы из $\mathfrak{R}_n$ обозначать прописными буквами, а векторы из $\mathfrak{R}_m$ $(m<n)$ — стр ными буквами жирного шрифта.

Пусть Ξ — нормальная случайная величина, причем

$$\mathbf{M}\Xi = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{X}_j, \quad \mathbf{D}\Xi = \sigma^2 E,$$

где a и σ^2 — неизвестные параметры. $\mathbf{X}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ — заданные ортонормирован векторы $(m < n)$ и E — единичная матрица. Требуется указать интервальную оцен линейной функции $y = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на заданном множестве $\mathbf{x} \in L$.

Как известно [1], [2], эффективная точечная оценка для искомой функции им вид

$$\eta = (\alpha, \mathbf{x}), \text{ где } \alpha_j = (\Xi, \mathbf{X}_j).$$

В качестве меры отклонения η от y выберем случайную величину

$$U = \sup_{L} |\tau_0(\mathbf{x})|,$$

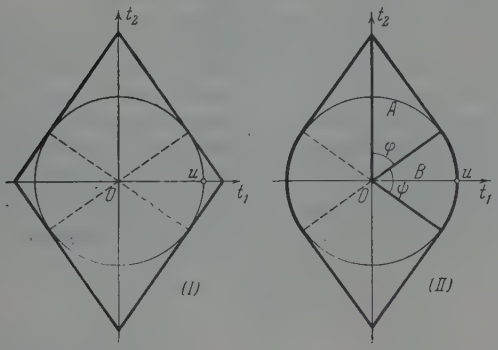
где

$$\tau_0 = \frac{(\tau, \mathbf{x})}{\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}}, \qquad \tau = \frac{\sqrt{n-m}}{S}(\alpha - \mathrm{a}),$$

$$S = |\mathbf{E} - \mathbf{H}|, \qquad \mathbf{H} = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \mathbf{X}_j.$$

Плотность распределения τ задается формулой [3], [4], [5] (обобщенное t — распределение Хоттелинга):

$$p(\mathbf{t}) = \frac{1}{[(n-m)\pi]^{m/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)} \left[1 + \frac{(\mathbf{t}, \mathbf{t})}{n-m}\right]^{-n/2}, \qquad (2)$$



Пусть k — размерность минимального подпространства, порожденного множеством единичных векторов $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ $(\mathbf{x} \in L)$. Без ограничения общности можно предположить, что $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_m = 0$, поэтому если множество векторов $\pm\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ $(\mathbf{x} \in L)$ расположено на k-мерной сфере единичного радиуса всюду плотно, то в силу неравенства Коши

$$U = \sup_L |\tau_0| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2}.$$

Так как $\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 / (n-m)$ подчиняется F — распределению по степеням свободы k и $n-m$, то $\mathbf{P}\{U < u\} = F_{k,\, n-m}[u^2/(n-m)]$, [3]. Таким образом, искомая интервальная оценка в этом случае представляет собой доверительную область, границы которой определяются уравнениями:

$$y = (\alpha, \mathbf{x}) \pm uS\sqrt{\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{n-m}}, \qquad (3)$$

где u — заданная квантиль, F — распределения со степенями свободы k и $n-m$.

В остальных случаях отыскание распределения U потребует интегрирования плотности (2) по множеству таких векторов t, проекции которых на множество L меньше заданного u.

Возможен и другой подход к задаче отыскания интервальной оценки для y [5]. Пусть $A(\Xi)$ — доверительная область для неизвестных параметров a. Легко видеть, что множество линейных функций $y = (\mathbf{a}^*, \mathbf{x})$, где $\mathbf{a}^* \in A$, представляет собой доверительную область для функции $y = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ с тем же коэффициентом доверия, что $A(\Xi)$. Это обстоятельство позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством интервальных оценок для y и множеством доверительных областей для $\mathbf{a}$. В частности, если векторы $\pm\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ $(\mathbf{x} \in L)$ расположены всюду плотно на k-мерной сфере, то области границами (3) соответствует доверительный эллипсоид с границей $\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 = u^2$ [3], [5]. Этот эллипсоид был предложен Ю. В. Линником [1] в качестве доверительной области для $\mathbf{a}$.

Частным случаем рассмотренной выше задачи является приближение неизвестно линейной функции $y = \frac{a_1}{\sqrt{n}} + a_2 x$. В этом случае пусть $m = 2$, $\mathbf{X}_1 = (1/\sqrt{n}, \ldots$ $\ldots, 1/\sqrt{n})$ и $\mathbf{X}_2$ — единичный вектор, ортогональный $\mathbf{X}_1$. Если множество допустимы значений x всюду плотно на числовой прямой, то $\mathbf{P}\{U < u\} = F_{2, n-2}[u^2/(n-2)$ В остальных случаях вычисление $P\{U < u\}$ требует вычисления интеграла от плотнос (2) ($m=2$) по множеству таких векторов (t_1, t_2), для которых

$$\sup_{x \in L} \frac{|t_1 + x\sqrt{n}\, t_2|}{\sqrt{1 + nx^2}} < u.$$

На чертеже изображен вид этой области для двух случаев: 1) когда L состоит из дву 2) когда L представляет собой отрезок действительной прямой. Так как плотность инвариантна относительно поворота осей координат, то для вычисления $\mathbf{P}\{U < u\}$ в сл чаях (I) и (II) достаточно уметь вычислять интегралы от плотности (2) по треугольни A и по сектору B. Формулы для вычисления этих интегралов были выведен О. Б. Шейниным [4].В этой же работе доказана предельная

Теорема. *Если* $L = [c, d]$ *и* $n \to \infty$, *то равномерно относительно* t

$$\mathbf{P}\{U < u\} \to 4T\left(\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2},\ u\right) + \frac{\psi}{\pi} C(u),$$

где

$$C(u) = e^{-u^2/2}, \quad T(v, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^v \frac{e^{-\frac{u^2}{2}(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx$$

и

$$\psi = \arccos \frac{1 + ncd}{\sqrt{(1+nc^2)(1+nd^2)}}$$

(в общем случае, когда компоненты вектора X_2 не удовлетворяют условиям $\Sigma x_i =$ и $\Sigma x_1^2 = 1$, следует c и d заменить на $(c - \bar{x}) / \sqrt{\Sigma (x_i - x)^2}$ и $(d = \bar{x}) / \sqrt{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}$ с ответственно). Функция T предложена в работе [6] для вычисления двумерного но мального интеграла. Там же указаны таблицы этой функции.

В настоящее время в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН ССС заканчивается составление таблиц процентных точек $u = u(n, \psi, \varepsilon)$, где ε — урове значимости.

Отыскание интервальных оценок в случае параболической интерполяции (т. е. тогд когда y представляет собой многочлен степени выше первой) связано с большими вычи лительными трудностями. В работе [3] специально рассматривается случай квадратично интерполяции. Для коэффициента доверия были найдены оценки снизу, более точны чем аналогичные оценки, указанные в работе [5] для общего случая.

II. Оценка энтропии полиномиального распределения. Наиболее распространенны способ оценки энтропии полиномиального распределения $H = -\Sigma p_i \ln p_i$ заключается в з мене неизвестных вероятностей p_i наблюденными частотами [7]. В результате получает асимптотически нормальная и асимптотически эффективная оценка. Следует отметит что этот факт является следствием общей теоремы, согласно которой оценка наибол шего правдоподобия для функции от неизвестных параметров в широком классе случае представляет собой наилучшую асимптотически нормальную оценку (параметры асимпто тического распределения вычисляются по обычным правилам). Доказательство этой теорем для одномерного случая имеется в книге Г. Крамера [8]. Многомерный случай подробн рассмотрен в работе [9], где доказано, что теорема останется справедливой, если оценк наибольшего правдоподобия для неизвестных параметров заменить любыми наилучшим асимптотически нормальными оценками (BAN — estimates), при этом предполагается, чт неизвестные параметры могут быть связаны некоторыми соотношениями.

Дипломная работа Л. Ю. Белоусова [10] является попыткой отыскания оценок дл энтропии с помощью общей теоремы, предложенной в работе [12] (результаты, изло женные в [12], обобщены на многомерный случай В. Ф. Писаренко [13]).

Рассматривается следующий план эксперимента:

1. Производится N независимых испытаний ($N \geqslant n$, где n — количество возможных исходов). Если все количества осуществлений возможных исходов $m_1, \ldots, m_n$ положительны, то в качестве оценки для H следует выбрать

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{N} \sum_{k=m_i}^{N-1} \frac{1}{k}. \qquad (4)$$

2. Если после N испытаний обнаружится, что некоторые исходы не осуществились, испытания продолжаются до тех пор, пока не осуществятся все исходы. Пусть n— номер того события, которое осуществилось последним ($m_n = 1$), тогда оценка для H имеет вид:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{M} \sum_{k=m_j}^{M} \frac{1}{k}, \quad \text{где} \quad M = \sum_{j=1}^{n-1} m_j. \qquad (5)$$

Оценка (4), (5) является несмещенной и единственной (в классе симметричных оценок). Воспользовавшись асимптотической формулой

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = C + \ln n + o(1),$$

можно легко показать, что при $N \to \infty$

$$\varphi \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{N} \ln \frac{N}{m_i}.$$

В работе [10] рассматривается и другая процедура оценки H. Пусть A_i — событие, осуществившееся при первом испытании, и пусть m — число испытаний, предшествующих следующему появлению исхода A_i ($m = 0, 1, 2, \ldots$). В этом случае несмещенная оценка для энтропии задается формулой

$$\varphi_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 0, \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}, & \text{если } m > 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Оценка (6) асимптотически эквивалентна оценке Р. Л. Добрушина [11]. Дисперсия этой оценки не превосходит $(\ln n)^2 / (n-1) + (n-1) \ln n / n$.

В работе [10] указаны верхние и нижние оценки для H в том случае, когда число испытаний N заранее фиксировано.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, К обоснованию метода наименьших квадратов. УМН, 1 : 1 (11), (1946), 57—70.

[2] Ю. В. Линник, Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, Физ.-мат. изд., М., 1958.

[3] Н. С. Кравченко, Доверительная область для линии квадратичной регрессии (дипломная работа), МГУ, кафедра теории вероятностей, 1959.

[4] О. Б. Шейнин, Доверительная область для линейной функции (дипломная работа), МГУ, кафедра теории вероятностей, 1959.

[5] P. G. Hoel, Confidence bands for polynomial curves, AMS, **25**, 3 (1954), 534—542.

[6] D. B. Owen, Tables for computing bivariate normal probabilities, AMS, **27**, 4 (1956), 1075—1090.

[7] Г. П. Башарин, О статистической оценке энтропии последовательности независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 3 (1959), 361—365.

Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, 1948.

[9] J. Neyman, Contribution to the theory of the χ^2-test. Proceedings of the 1-st Berkeley Symposium, Los-Angeles, 1948.

[10] Л. Ю. Белоусов, Оценка энтропии полиномиального распределения (дипломна работа), МГУ, кафедра теории вероятностей, 1959.
[11] Р. Л. Добрушин, Упрощенный метод экспериментальной оценки энтропии ст ционарной последовательности, Теория вероят. и ее примен., III, 4 (1958), 462—46
[12] M. A. Girshik, F. Mosteller, L. J. Savage, Unbiased estimates for certa binomial sampling problems with applications, AMS, 17 (1946), 13—23.
[13] В. Ф. Писаренко, Несмещенная оценка последовательного типа (дипломная р бата), МГУ, кафедра теории вероятностей, 1956.

Розанов Ю. А. Некоторые результаты по прогнозированию стационарных проце сов (Rozanov Yu. A., Some Results on Forecasting Stationary Processes).

Пусть $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}_1^n$ — n-мерный стационарный процесс, значения кот рого известны во все моменты времени t вне некоторого интервала $T = (-\tau, \tau)$.

Задача линейного прогноза неизвестных значений $x_k(t)$, $t \in T$, $k = \overline{1,n}$ нашего пр цесса состоит в нахождении проекций $\hat{x}_k(t, T)$ этих значений на линейное замыкан $\hat{H}(T)$ совокупности известных величин $x_k(s)$, $s \in T$, $k = 1,n$. В случае дискретно времени t поставленная задача полностью решена ([1] — [4]).

Ограничимся случаем, когда процесс $x(t)$ имеет спектральную плотнос $f_\lambda = \{f_{kj}(\lambda)\}$, $k, j = \overline{1,n}$. Пусть R — n-мерное евклидово пространство, и $R_\lambda = f_\lambda$ Обозначим через f_λ^{-1} оператор на R_λ, обратный к f_λ. Пусть далее, $\mathfrak{B}(T)$ — пространст вектор-функций $b_\lambda = \{b_1(\lambda), \ldots, b_n(\lambda)\}$, таких, что а) $b_\lambda \in R_\lambda$ для почти всех б) компоненты $b_k(\lambda)$ являются целыми аналитическими функциями экспоненциально вида с показателем не большим τ, в) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_\lambda^{-1} b_\lambda, b_\lambda)\, d\lambda$$

конечен. Отождествим все вектор-функции b'_λ и b''_λ, разность $b_\lambda = b'_\lambda - b''_\lambda$ которых удо летворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_\lambda^{-1} b_\lambda, b_\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Пусть $\Delta(T)$ есть линейное замыкание в среднем квадратичном разностей $x_k(t) - \hat{x}_k(x,$ $k = \overline{1,n}$.

Теорема 1. *Случайным величинам* $\delta \in \Delta(T)$ *взаимно однозначно соответствуют вектор-функции* $b_\lambda \in \mathfrak{B}(T)$, *причем* $\mathbf{M}\,\delta\delta' = \int_{-\infty}^{\infty} (f_\lambda^{-1} b_\lambda, b'_\lambda)\, d\lambda$.

Если $\Phi_k(d\lambda)$, $k = \overline{1,n}$ — спектральные меры процесса $x(t)$, то величины $\hat{x}_{ik}(t,$ представляются в виде стохастического интеграла

$$x_k(t, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{kj}(t, T, \lambda)\, \Phi_j(d\lambda).$$

Обозначим матрицу $\{\varphi_{kj}(t, T, \lambda)\}$ через $\varphi_T(t, \lambda)$; положим

$$A_T(t, \lambda)\, e^{i\lambda T} = \varphi_T(t, \lambda).$$

Теорема 2. *Матричная функция* $A_T(t, \lambda)$ *задает на пространстве* $\mathfrak{B}(T)$ *оператор A*

$$A_T b_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_T(t, \lambda)\, b(\lambda)\, d\lambda = \widetilde{b}(t),$$

...вп...дающий с преобразованием Фурье, т. е.

$$\tilde{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda t} b(\lambda)\, d\lambda.$$

Матричная функция $A_T(t, \lambda)$ *определяется дополнительным условием:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda s} f_\lambda A_T(t, \lambda)\, d\lambda = 0,$$

...ри всех t *и* $s \overline{\in} T$.

ЛИТЕРАТУРА

1] А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, 2, 6 (1941), 1—40.
2] А. М. Яглом, УМН, IV, 4 (1949), 171—178.
3] Ю. А. Розанов, ДАН СССР, 116, 6 (1957), 22—25.
4] P. Massani, C. R. Acad. Sci., 246, 15 (1958), 2215—2217.
5] K. Karhunen, Suom. tiend. toim (Хельсинки), ser. A, 1, 142 (1952).

Заседание 4 ноября.

Колмогоров А. Н., О классах $\Phi^{(n)}$ Форте и Блан-Лапьерра (Kolmogorov A. N., On Class $\Phi^{(n)}$ of Fortet and Blanc-Lapierre).

Если для действительного случайного процесса $\xi(t)$ существуют непрерывные абсолютные моменты порядка n, подчиненные условию

$$\mathbf{M}\,|\xi(t)|^n \leqslant C(1 + |t|^s), \tag{1}$$

...о при $k \leqslant n$ моменты

$$m_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{M}[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_k)]$$

...можно представить в виде

$$m_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) = \int \cdots \int e^{i(t,\lambda)} \mu_\xi^{(k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\, d\lambda_1, \ldots, d\lambda_k,$$

...де $\mu_\xi^{(k)}$ — обобщенные функции.

Процесс принадлежит классу $\Phi^{(n)}$ [1], если все $\mu_\xi^{(k)}$ «типа конечной меры», т. е.

$$m_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) = \int \cdots \int e^{i(t,\lambda)} \mathbf{M}_\xi^{(k)}(d\lambda),$$

...де $\mathbf{M}_\xi^{(k)}(A)$ конечная комплексная мера в k-мерном пространстве.

Хорошо известно, что при $n = 2$ для строго стационарных $\xi(t)$ из существования моментов $\mathbf{M}\,|\xi|$ и $\mathbf{M}\,|\xi|^2$ вытекает принадлежность к классу $\Phi^{(2)}$.

В докладе на примерах показывается, что аналогичное утверждение не верно при $n > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1] A. Blanc—Lapierre, R. Fortet, Theorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.

Леонов В. П. и Ширяев А. Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов (Leonov V. P. and Shiraev A. N., Some Questions in the Spectral Theory of Higher-order Moments).

Содержание доклада будет опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения».

Заседание 18 ноября.

Алмазов А. Б., О движении электрона в неидеальных кристаллах (Almazov A. B., On Electron Motion in Imperfect Crystals).

Состояние электрона в поле нескольких центров описывается уравнением Шредингера:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \sum_i V_i(r - {}_i) \right] \psi_\alpha(r) = E_\alpha \psi_\alpha(r),$$

где суммирование производится по всем центрам (r_i — положение i-го центра). Реше ния и собственные значения этого уравнения хорошо исследованы для того случая, ког да центры располагаются в узлах правильной кристаллической решетки. Тогда спектр электрона представляет собой совокупность групп уровней. Каждая такая группа (зо на) отделена от других групп так называемой запрещенной зоной, т. е. теми зна чениями энергии, которым не соответствует никакое собственное значение уравнени Шредингера. При этом волновые функции $\psi_\alpha(r)$ и собственные значения классифици руются по неприводимым представлениям некоторой подгруппы группы трансляций [1].

Задача о состоянии электрона в поле многих центров, распределенных статисти чески, в настоящее время даже не поставлена достаточно корректно. Между тем толь ко рассмотрение этой задачи может дать какие-то выводы, которые можно сопоставить с экспериментом, ибо даже при наиболее удачном приготовлении кристалла идеальност его всегда нарушена тепловыми колебаниями атомов.

Одним из возможных предельных случаев такой задачи является рассмотрени состояния электрона в поле многих центров, распределенных однородно и изотропно По-видимому, в таких системах спектр не является зонным. Из инвариантности свойст системы в среднем по отношению ко всем трансляциям и поворотам вытекает, чт состояние электрона должно характеризоваться, помимо энергии, еще двумя сохраняю щимися в среднем величинами, аналогами импульса и момента количества движения Эта задача является квантово-механическим обобщением известной задачи о движени звезды, подверженной хаотическим воздействиям гравитационных полей окружающи звезд.

В другом предельном случае расположение центров в любой достаточно малой окрестности каждой точки в среднем лишь немного отличается от их расположени в идеальном кристалле (полимеры, стекла, некоторые жидкости и кристаллы, идеаль ность которых нарушена тепловыми колебаниями атомов). Такое расположение цент ров называется ближним порядком. При исследовании относящегося сюда круга вопро сов целесообразно ввести количественную меру ближнего порядка. При достаточно общности решение этой задачи должно сводиться при различных предельных значения этой меры к теории идеальных кристаллов или к задаче о движении электрона в пол хаотически распределенных центров.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел. ИЛ, М., 1956.

Колмогоров А. Н., Случайные функции нескольких переменных, почти все реализации которых периодичны. (Kolmogorov A. N. Stochastic Functions of Several Variables Whose Realizations Are Almost All Periodic).

Репером в эвклидовом пространстве E^n называется набор

$$R = (l_1, \ldots, l_n)$$

из n линейно независимых векторов. Функция $k(t)$ от n-мерного вектора t называется *R-периодической*, если существует репер

$$R^* = (l_1^*, \ldots, l_n^*)$$

конгруэнтный R, для которого

$$k(z^1 l_1^* + \ldots + z^n l_n^*) = f(z^1, \ldots, z^n);$$

и функция f периодична по каждому переменному z^k с периодом 2π.

Даются необходимые и достаточные условия R-периодичности почти всех реализаций случайной функции $\xi(t)$ в терминах «спектральных моментов».

Отсюда, в частности, вытекает, что стационарная, изотропная, R-периодическая случайная функция, не равная константе *не может быть при* $n > 1$ *гауссовской*. Изложенное может иметь интерес при исследовании потенциалов и решений уравнения Шредингера в кристаллах и средах с «близким порядком».

Заседание 25 ноября.

Линник Ю. В. (Ленинград), **Некоторые теоремы о больших уклонениях** (Linnik Yu. V., Some Theorems on Large Deviations).

1. Область нормального притяжения при учете больших уклонений.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые одинаково распределенные случайные величины $\mathbf{M}X_l = 0$, $\mathbf{D}X_l = \sigma^2$. Положим

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

сть выполнено условие

$$\mathbf{M}(\exp(\alpha \mid X \mid^{1/k})) < \infty \quad (k \geqslant 1), \tag{1}$$

е $\alpha > 0$ константа.

Если $k < 2$, то какова бы ни была заданная $\psi(n) = o(n^{1/6})$, при $n \to \infty$ равномерно по x $(0 \leqslant x \leqslant \psi(n))$,

$$\mathbf{P}\{Z_n > x\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt. \tag{2}$$

Если $\psi(n)$ растет быстрее, чем указано выше, то (2) вообще говоря, неверно.

При $k \geqslant 2$ утверждение (2) имеет место, если $0 \leqslant x \leqslant n^{\frac{1}{4k-2}-\varepsilon}$ (ε — любое положительное число) и, по-видимому, неверно при $\varepsilon < 0$.

2. Теорема о больших уклонениях, действующая на всей оси.

Предположим дополнительно, что величины X_l имеют четную абсолютно непрерывную плотность вида $g(x) = r(x) + O(x^{-m})$, где $r(x)$ — рациональная функция, а m при данной $r(x)$ достаточно велико. Тогда для всех $x \geqslant 1$.

$$\mathbf{P}\{Z_n > x\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt + R(\sqrt{n}, x),$$

е $R(\sqrt{n}, x)$ рациональная функция $\sqrt{n}$ и x, вычисляемая по $r(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

Г. Крамер, Об одной новой предельной теореме теории вероятностей, УМН, 10 (1944).

Заседание 2 декабря.

ирсанов И. В., Дынкин Е. Б., Топологии, связанные с марковским процессом и строго марковское свойство. (Girsanov I. V., Dynkin E. B. Topologies ncerning with Markov processes and strong Markov property).

С каждым марковским процессом можно связать некоторую естественную тополо-о в фазовом пространстве. Дается обзор свойств этой топологии для класса стан-ртных марковских процессов. При этом излагаются результаты работ [1], [2], [3], [4]. Далее рассматриваются связанные с марковским процессом равномерные струк-ры в фазовом пространстве. Одна из них была введена в [3], другая использована Рэем [5] для построения строго марковского расширения марковского процесса. Излагается конструкция Д. Рэя и обсуждается более общая постановка задачи.

ЛИТЕРАТУРА

G. H. Hunt, Markov processes and potentials, III. Journ. of Math. 1 : 1, (1947), 44.

Е. Б. Дынкин, Естественная топология и эксцессивные функции, связанные с марковским процессом, ДАН СССР, **127**, 1 (1959).

И. В. Гирсанов, О некоторых топологиях, связанных с марковским процессом, ДАН СССР, **129**, 3 (1959).

М. Г. Шур, О феллеровском свойстве марковских процессов, ДАН СССР, **129**, 6 (1959).

D. Ray, Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Ann. Math. 70 : 1 (1959), 43—72.

Исправления

В работу Ю. В. Линник «Общие теоремы о разложении безгранично делимых з конов. I» (том III, вып. 1, 1958) надлежит внести следующие исправления:

на стр. 29, после формулы (17.14) надо вставить фразы:

«В дальнейшем будем считать:

$$|t| \leqslant \exp(0{,}51\eta_0\sigma_0). \tag{17.}$$

Значениями t, не удовлетворяющими (17.15), мы можем пренебречь. На основании оч видного аналога (11.13), имеем:

$$\int\limits_{|t|>\exp(0,51\eta_0\sigma_0)} |\Psi_0(z)\, e^{-zx}|\, dt = B \exp(U_0(x)) \exp(-0{,}01\eta_0\sigma_0) \tag{17.}$$

чем, как видно будет из дальнейшего, можно будет пренебречь».

Весь текст после слов: «Докажем что . . . » после формулы (18.2) и до кон стр. 29 следует заменить нижеследующим:

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| \leqslant K_1 \exp\left(-\sigma_0 \frac{1-1{,}52\eta_0}{3}\right) = \xi_1. \tag{18}$$

Пусть это не так, и $\left|\sin\frac{t}{2}\right| > \xi_1$. Положим: $\xi_1^1 = \xi_1 \exp(-0{,}51\eta_0\sigma_0)$. Тогда при $|v| \leqslant \xi_1^1$ имеем, учитывая (17.15);

отсюда:

$$\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2\frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v, > \frac{\xi_1^2}{16}) \qquad \int\limits_{-\xi_1^1}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v) > \frac{a_0}{16}\xi_1^3 \exp(-0{,}51\eta_0\sigma_0)$$

— в силу (16.3).

Далее, $\xi_1^3 = K_1^3 \exp(-\sigma_0(1-1{,}52\eta_0))$ и полученное неравенство противоречит (18. Этим (18.3) доказано. Аналогично из (18.1) следует;

$$\left|\sin\frac{\alpha t}{2}\right| \leqslant K_1 \exp\left(-\sigma_0 \cdot \frac{\alpha - 1{,}52\eta_0}{3}\right) = \xi_2. \tag{18}$$

При этом $\xi_2 = \xi_1 \exp\frac{1-\alpha}{3}\sigma_0$; $1-\alpha \leqslant 10^{-10}$.

Ю. В. Линни

В работе Ф. И. Карпелевича, В. Н. Тутубалина, М. Г. Шур «Предельные тео мы для композиций распределений в плоскости и пространстве Лобачевского» (том вып. 4, 1959) допущена ошибка: в формулировке теоремы 4 пропущено условие

$$\sum_{r=1}^{k_n} \int\limits_{\tau}^{\infty} d\hat{\mu}_{n,r} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при любом $\tau > 0$, без которого теорема, очевидно, неверна.

Ф. И. Карпелевич, В. Н. Тутубалин, М. Г. Шу

В работе М. Е. Герценштейна, В. Б. Васильева «Волноводы со случайными не нородностями» (том IV, вып. 4,1959) рассмотрена задача о волноводе со случайны неоднородностями, причем исходным моментом была инвариантность уравнения К могорова относительно дробно-линейных преобразований. При этом должна быть вз инвариантная метрика [1]

$$ds^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{[1-(x^2+y^2)]^2} = 4\left[d\eta^2 + \left(\frac{sh\,2\eta}{2}\right)d\varphi^2\right].$$

Заменой переменного $\xi = 2\eta$ получается уравнение

$$\frac{1}{4D}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{ihz}\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{sh^2\xi}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2},$$

отличающееся от уравнения (16) работы лишь масштабом по осям t и ξ. С учет изменения масштаба все дальнейшие формулы правильны. Авторы выражают с признательность С. М. Альберу, обратившему внимание на ошибку в работе.

[1 Б. А. Фуке, Неевклидова геометрия в теории комформных и псевдокомформ отображений, Гостеортехиздат, 1951.

М. Е. Герценштейн, В. Б. Василь

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Т. А. Михайлова*

Т-10314 Подписано к печати 8/VIII-1960 г. Тираж 2275 экз. Зак. 3316
Формат бум. 70×108¹/₁₆ Печ. л. 9,59 Бум. л. 3¹/₂ Уч.-изд. л. 10,0

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 11 р. 25 к.